

De efficiëntie van indirect optellen bij aftrekkingen tot 1000: ook bij opgaven zonder overbrugging?

L. Verschaffel, B. De Smedt, H. Vanaken, en J. Torbeyns

Abstract

In eerder onderzoek op het gebied van hoofd-rekenend aftrekken tot 1000 werd de superieure efficiëntie van indirect optellen ten opzichte van direct aftrekken meermaals aangetoond. In dat onderzoek werd er echter steeds gebruik gemaakt van opgaven met minstens een overbrugging (bijv. $814 - 786 = ?$). Daarom gingen we in de huidige studie de efficiëntie van indirect optellen na bij aftrekopgaven zonder overbrugging (bijv. $824 - 611 = ?$). Vijfenvijftig leerlingen uit het zesde leerjaar (= groep 8), opgesplitst in een onder- en bovengemiddelde groep, kreeg een reeks van 15 aftrekopgaven met een klein, middelmatig of groot verschil tussen aftrektal en aftrekker - aangeboden in twee geen-keuzecondities. In de ene conditie moesten ze alle opgaven oplossen met de direct aftrekstrategie en in de andere via de indirecte optelstrategie. Indirect optellen leidde zowel bij alle leerlingen tot meer accurate oplossingen dan direct aftrekken. Dit gold niet alleen voor opgaven met een klein verschil, waarvoor indirect optellen als de meest passende strategie wordt beschouwd, maar ook voor de twee andere opgaventypes. Anderzijds werd indirect optellen in beide niveaugroepen trager uitgevoerd dan direct aftrekken, behalve voor de oefeningen met een klein verschil. Deze resultaten vragen om verder onderzoek naar de veralgemeenbaarheid van deze bevindingen en de oorzaken ervan.

kenwoorden: wiskundeonderwijs, hoofd-rekenen, adaptieve expertise, keuze/geen-keuze paradigma

1 Inleiding

1.1 Strategieën voor meercijferig aftrekken

De voorbije jaren is er heel wat onderzoek verricht naar hoe volwassenen en kinderen meercijferige aftrekopgaven hoofd-rekenend oplossen (bijv. Beishuizen, 1993; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998; De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010; Selter, 2001; Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009). Daaruit is gebleken dat zowel volwassenen als kinderen verschillende soorten strategieën toepassen om zulke aftrekopgaven op te lossen. Rekening houdend met het soort rekenkundige bewerking dat wordt uitgevoerd om tot de oplossing te komen, kan een onderscheid gemaakt worden tussen twee soorten strategieën (Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009): directe aftrek- en indirecte optelstrategieën. Bij een directe aftrekstrategie trekt men de aftrekker rechtstreeks af van het aftrektal. Bijvoorbeeld $654 - 368 = ?$ wordt dan opgelost door eerst $654 - 300 = 354$ en vervolgens (al dan niet in tussenstappen) $354 - 60 = 294$, $294 - 8 = 286$ te doen. Een indirecte optelstrategie wordt gekenmerkt door het gebruik van de complementaire bewerking optellen om de aftrekopgave te beantwoorden: men gaat na hoeveel er bij de aftrekker moet worden opgeteld om het aftrektal te bekomen. Bijvoorbeeld $654 - 368 = ?$ wordt dan opgelost door eerst $368 + 32 = 400$, dan $400 + 254 = 654$ te doen en dan de bijgetelde aantallen samen te tellen $32 + 254 = 286$. Hierbij merken we op dat er naast de gegeven voorbeelden van de directe aftrek- en indirecte optelstrategie ook nog andere manieren zijn om de beide strategieën uit te voeren (zie Hickendorff, Torbeyns, & Verschaffel, 2019; Torbeyns, Ghesquière & Verschaffel, 2009, voor uitvoerige overzichten van de verschillende uitvoeringswijzen

van de directe aftrek- en indirecte optelstrategie). Zo zou men $654 - 368 = ?$ via een directe aftrekstrategie ook splitsend in plaats van rijgend kunnen aanpakken (nl. $600 - 300 = 300$, $50 - 60 = 10$ tekort en $4 - 8 = 4$ tekort, dus $300 - 10 - 4 = 286$), of de indirecte optelstrategie ook nog via een andere variant van rijgen waarbij men, in plaats van eerst aan te vullen tot het volgend honderdtal, achtereenvolgens bekijkt hoeveel honderdtallen, tientallen en eenheden er bijgeteld kunnen worden: $368 + 200 = 568$, $568 + 80 = 648$ en $648 + 6 = 654$, dus de uitkomst is $200 + 80 + 4 = 286$.

Op basis van een rationele taakanalyse wordt er door wiskundendidactici algemeen van uitgegaan dat elk van beide strategieën het efficiëntst is voor het oplossen van een bepaald type opgaven. Direct aftrekken wordt als de meest efficiënte strategie beschouwd voor aftrekopgaven met een groot verschil tussen de beide getallen, zoals $804 - 16 = ?$ (o.a. Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Wittmann & Müller, 1990-1992), omdat er bij toepassing van deze strategie minder en/of eenvoudigere stappen gezet moeten worden dan wanneer een indirecte optelstrategie zou hanteren (bijv. $804 - 10 - 6 = 788$ versus $16 + 84 + 700 + 4 = 804$ dus het antwoord is 788). Bij opgaven met een klein verschil tussen aftrektal en aftrekker, zoals $804 - 788 = ?$, zou, rekening houdend met het aantal te zetten stappen en de complexiteit van die stappen, de indirecte optelstrategie de meest efficiënte strategie zijn (bijv. $788 + 12 + 4 = 804$ dus het antwoord is 16, versus $804 - 700 - 80 - 8 = 16$).

Onderzoekers hebben er evenwel op gewezen dat in verscheidene landen, waaronder België, het elementair wiskundeonderwijs nauwelijks aandacht besteedt aan het efficiënt en flexibel leren gebruiken van de indirecte optelstrategie. Hoewel eindtermen, leerplannen en handboeken vaak het belang van variabel en flexibel strategiegebruik in algemene zin beklemtonen, is er in de praktijk van het elementair wiskundeonderwijs vaak een sterke gerichtheid op “routine” eerder dan “adaptieve expertise” (Hatano, 2003; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009). Specifiek voor het hoofd-

rekenend aftrekken komt dit neer op instructie gericht op het snel en foutloos leren uitvoeren van de directe aftrekstrategie bij alle soorten opgaven, met weinig of geen intentionele en systematische aandacht voor het indirect optellen. En als er toch aandacht wordt besteed aan deze laatste strategie, dan slechts als een “extra” voor de sterkere rekenaars eens ze de directe aftrekstrategie beheersen (Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009).

1.2 Eerdere studies naar de efficiëntie van indirect optellen

Bovenstaande elementen vormden het vertrekpunt van een toenemend aantal studies naar het gebruik van indirect optellen niet alleen in België (De Smedt et al., 2010; Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2010; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009; Torbeyns, De Smedt, Peters, Ghesquière, & Verschaffel, 2011; Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009;) en Nederland (Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998; Peltenburg, Van Den Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2011), maar ook in andere landen (Heinze, Marschick, & Lipowsky, 2009; LeFevre, DeStefano, Penner-Wilger, & Daley, 2006; Selter, 2001; Selter, Prediger, Nührenbörger, & Hussmann, 2012).

In verscheidene van die studies vertrokken de onderzoekers van Lemaire en Siegler's (1995) model van “strategy change”, waarin een onderscheid wordt gemaakt tussen vier parameters van strategische competentie. De eerste parameter, repertoire, verwijst naar de verscheidenheid van strategieën die iemand gebruikt om een taak op te lossen. De frequentie waarmee iemand elk van deze strategieën toepast vormt de tweede parameter. De derde parameter betreft de efficiëntie van strategie-uitvoering, en omvat zowel de accuraatheid als de snelheid waarmee dit gebeurt. De vierde parameter verwijst naar de flexibiliteit of adaptiviteit van de strategiekeuzen, waarbij nog verder onderscheid te maken is tussen flexibiliteit op basis van opgave- en subjectkenmerken, zoals respectievelijk de grootte van het

verschil tussen aftrekker en aftrektal en de beheersing van de verschillende strategieën door iemand.

Om deze vier parameters van strategiegebruik te onderzoeken kan men de “choice/no-choice” methode (Siegler & Lemaire, 1997) gebruiken. Deze methode komt erop neer dat deelnemers eenzelfde reeks opgaven of parallelle opgavenreeksen in meerdere condities aangeboden krijgen: een keuzeconditie, waarbij de deelnemers bij elke opgave mogen kiezen op welke manier zij die oplossen (bijvoorbeeld via direct aftrekken of indirect optellen) en twee geen-keuzecondities waarin de deelnemers alle opgaven verplicht volgens een bepaalde strategie moeten oplossen (bijvoorbeeld via een directe aftrekstrategie of een indirecte optelstrategie). Deze methode verschilt van de aanpak die door de meeste onderzoekers wordt gehanteerd en waarbij men de deelnemers enkel opgaven laat oplossen in een keuzeconditie. Het aanvullen van een keuzeconditie met twee of meerdere geen-keuzecondities biedt twee grote voordelen. Een eerste voordeel is dat de geen-keuzecondities de onderzoekers toelaten om niet vertekende data te verzamelen over de accuraatheid en snelheid waarmee de deelnemers de verschillende strategieën kunnen uitvoeren. De tweede troef is dat de vergelijking van de data uit de keuze- en geen-keuzecondities het mogelijk maakt te bepalen in welke mate de deelnemers hun strategiekeuzen in de keuzeconditie flexibel afstemmen op de mate waarin zij deze beheersen (i.c. accuraatheid en/of snelheid) (Luwel, Onghena, Torbeyns, Schillemans, & Verschaffel, 2009; Siegler & Lemaire, 1997).

Studies die werkten met deze keuze/geen-keuze methode bij zowel volwassenen als kinderen die met aftrekkingen tot 1000 werden geconfronteerd, toonden in de eerste plaats aan dat, hoewel de deelnemers weinig of geen instructie en oefening in de indirecte optelstrategie als methode voor het hoofd-rekenend oplossen van symbolische aftrekkingen tot 1000 hadden gekregen, zij deze strategie toch vaak toepasten om dergelijke opgaven op te lossen. Zij pasten deze strategie soms zelfs even vaak of nog vaker dan de

directe aftrekstrategie. Een tweede terugkerende vaststelling was dat niet enkel volwassenen maar ook kinderen de niet-onderwezen indirecte optelstrategie efficiënter (d.w.z. accurater en/of sneller) toepasten dan de directe aftrekstrategie, niet enkel bij opgaven met een klein verschil tussen aftrektal en aftrekker, maar soms ook bij opgaven met een middelmatig zelfs een groot verschil tussen deze termen. Ten derde maakten de deelnemers ook flexibele strategiekeuzes: volwassenen en kinderen hielden daarbij rekening met de kenmerken van de opgaven (meer bepaald de grootte van het verschil tussen de termen) en/of met hun individuele strategie-efficiëntie (d.w.z., hoe snel en accuraat zij de direct aftrek- en de indirect optelstrategie konden uitvoeren) (Torbeyns, De Smedt, Peters, Ghesquière, & Verschaffel, 2011; Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009; Torbeyns, Peters, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2018; Torbeyns & Verschaffel, 2013). Tenslotte kwam uit dit onderzoek naar voren dat de bovenvermelde bevindingen betreffende het frequent, efficiënt en flexibel gebruik van de indirecte optelstrategie niet enkel golden voor rekensterke kinderen, maar ook voor middelmatige en zwakke rekenaars (Torbeyns et al., 2018).

Deze verrassende resultaten zijn niet enkel interessant voor de theorievorming op het gebied van de ontwikkeling van (hoofd) rekenstrategieën. De terugkerende vaststelling dat vele volwassenen en kinderen een niet-onderwezen rekenstrategie vaak verkiezen boven de expliciet en systematisch aangeleerde werkwijze, dat zij deze niet-onderwezen strategie bovendien minstens even efficiënt en vaak zelfs efficiënter toepassen dan de aangeleerde strategie, én dat zij die strategie vaak ook nog flexibel weten in te zetten rekening houdend met taak- en subjectkenmerken, roept vragen op bij de klemtoon die in de huidige onderwijspraktijk op de directe aftrekstrategie wordt gelegd.

2 Probleemstelling

Het eerdere onderzoek naar de efficiëntie van indirect optellen focuste echter op een bepaald

soort opgaven, namelijk aftrekkingen met overbrugging van het tiental in een of meerdere rangen. Concreet: de deelnemers kregen wel opgaven met overbrugging zoals $814 - 456 = ?$ aangeboden, maar geen opgaven zoals $834 - 612 = ?$, waarin nergens sprake is van een overbrugging.

Hoewel dit nergens expliciet gethematiseerd wordt, lijkt het aannemelijk dat de onderzoekers zich alsnog op de eerste categorie van opgaven hebben toegespitst, omdat zij op die manier de complexiteit van de opgaven zo hoog mogelijk wilden opdrijven (Imbo, Vandierendonck, & De Rammelaere, 2007). Bij deze complexe opgaven kunnen de mogelijke verschillen in efficiëntie tussen beide strategieën (in de twee geen-keuzecondities) het duidelijkst tot uitdrukking komen en wordt het computationele voordeel van de keuze voor de meest efficiënte strategie (in de keuzeconditie) gemaximaliseerd. Het valt dan ook niet uit te sluiten dat dit getalskenmerk van de aftrekopgaven uit de tot nog toe verrichte studies verantwoordelijk is voor de gevonden computationele suprematie van de indirecte optelstrategie. Daarom vonden we het belangrijk, zowel vanuit theoretisch als praktisch oogpunt, om na te gaan of de gerapporteerde effecten betreffende de superieure efficiëntie van deze strategie zich ook uitstrekken tot aftrekopgaven in het getalldomein tot 1000 waarin geen sprake is van overbrugging. Met deze studie wilden we een antwoord geven op deze vraag. Aangezien de focus van het onderzoek op de efficiëntie van de twee soorten aftrekstrategieën lag, volstond het de opgaven aan te bieden in twee geen-keuzecondities – een met verplicht gebruik van de directe aftrekstrategie en een waarin de indirecte optelstrategie gebruikt moet worden – en hoefde er geen keuzeconditie te worden ingelast.

Aan de basis van onderhavig onderzoek lagen dus twee contrastieve hypothesen: Ofwel is de indirecte optelstrategie zonder meer computationeel superieur ten opzichte van de directe aftrekstrategie en worden de resultaten uit het eerder onderzoek bij opgaven met overbrugging bevestigd bij opgaven zonder overbrugging; ofwel hangt het fenomeen van de computationele superioriteit van

de indirecte optelstrategie samen met het specifiek soort van (overbruggings)opgaven waarmee tot nog toe is gewerkt en is dit fenomeen dan ook niet terug te vinden bij opgaven zonder overbrugging. De afwezigheid van theoretische argumenten enerzijds en van resultaten van voorafgaand empirisch onderzoek anderzijds, lieten ons niet toe om één van beide hypothesen naar voren te schuiven.

Naast de analyse van de efficiëntie van het gebruik van de indirecte optel- en de directe aftrekstrategie (onderzoeksvraag 1), trachtten we met onderhavige studie ook nog de volgende twee vragen te beantwoorden:

- Is er een verschil in de efficiëntie van het gebruik van de indirecte optel- en de directe aftrekstrategie tussen de onder- en bovengemiddelde leerlingen bij meercijferige aftrekkingen zonder een overbrugging in het getalldomein tot 1000 (onderzoeksvraag 2)?
- Is er een verschil in de efficiëntie van het gebruik van de indirecte optel- en de directe aftrekstrategie tussen opgaven met een klein verschil, een middelmatig verschil en een groot verschil tussen de termen bij meercijferige aftrekkingen zonder een overbrugging in het getalldomein tot 1000 (onderzoeksvraag 3)?

Omdat efficiëntie zowel accuraatheid als snelheid omvat (Luwel et al., 2009; Siegler & Lemaire, 1997), viel elk van de drie onderzoeksvragen uiteen in een deelvraag betreffende de accuraatheid (onderzoeksvraag 1a, 2a en 3a) en de snelheid (onderzoeksvraag 1b, 2b en 3b) van strategie-uitvoering.

3 Methode

3.1 Deelnemers

Tweeënzestig leerlingen uit drie klassen van het zesde leerjaar (groep 8) afkomstig uit twee Vlaamse basisscholen werden uitgenodigd om deel te nemen aan het onderzoek. Van deze leerlingen kregen er 55 van hun ouders toestemming tot deelname ($M = 11$ jaar en 6 maand [$SD = 5$ maand]), waarvan 26 jongens en 29 meisjes. Op basis van hun score op de wiskundetoets van het leerling-

Tabel 1

Aantal leerlingen, aantal jongens en meisjes, gemiddelde leeftijd en gemiddelde percentielscore per niveaugroep

Niveaugroep	Aantal leerlingen	Aantal jongens	Aantal meisjes	Gemiddelde leeftijd [SD]	Gemiddelde percentielscore rekenvaardigheid [SD]
Ondergemiddeld	30	12	18	11 jaar en 6 maand [5 maand]	20.27 [16.42]
Bovengemiddeld	25	14	11	11 jaar en 7 maand [4 maand]	70.32 [16.42]

volgsysteem, L6 midden schooljaar wiskunde VCLB (Deloof, 2005), maakten we onderscheid tussen twee niveaugroepen. De eerste groep bestond uit de leerlingen met een percentielscore tussen 0 en 49, terwijl de tweede groep de leerlingen bevatte met een percentielscore tussen 50 en 100. Hierna duiden we beide groepen respectievelijk aan met de termen onder- en bovengemiddeld. De twee groepen verschilden significant qua rekenvaardigheid, $F(1,54) = 135.31$, $p < .01$. Tabel 1 geeft voor beide groepen het aantal leerlingen, hun geslacht, de gemiddelde leeftijd en de gemiddelde percentielscore op de wiskundetoets weer.

We analyseerden de wiskundemethode die in de deelnemende scholen werd gebruikt en interviewden de klas- en zorgleerkrachten van het derde (= groep 5) tot en met het zesde leerjaar (= groep 8) om zicht te krijgen op de strategie-instructie die de kinderen in het domein van het meercijferig aftrekken hadden genoten. Beide scholen werkten met de veel gebruikte wiskundemethode “De Wiskanjers” (Duerloo, Jacobs, & Van Hijfte, 2016). De handboekanalyse en interviews met de leerkrachten toonden aan dat zij direct aftrekken, en meer bepaald de bovenbeschreven “rijgende” variant van deze strategie systematisch onderwezen als standaardaanpak voor het hoofdrekendend oplossen van meercijferige aftrekkingen. In geen enkele klas werd indirect optellen als alternatieve strategie onderwezen. Verder bleek uit deze handboekanalyses en interviews dat de leerlingen vertrouwd waren met de lege getallenlijn, al werd die zelden gebruikt om rekenkundige bewerkingen uit te voeren of om een

rekenstrategie uit te leggen. De leerkrachten rapporteerden ook nog dat er geen differentiatie gebeurde op vlak van strategie-instructie in functie van de rekenvaardigheid van de leerlingen. Wel kregen zwakkere leerlingen extra uitleg over en bijkomende mogelijkheid tot inoefenen van de directe aftrekstrategie.

3.2 Materiaal

Elke leerling loste twee parallelle reeksen (A en B) met 15 aftrekopgaven zonder overbrugging in het getallendomein tot 1000 op. Zowel de A-reeks als de B-reeks bestond uit drie types opgaven, namelijk vijf opgaven met een klein verschil, vijf opgaven met een groot verschil en vijf opgaven met een middelmatig verschil tussen de termen. In lijn met eerdere studies, typeerden we opgaven met een klein verschil als “drieterm – drieterm = tweeterm” met een verschil tussen 10 en 30 (bijv. $947 - 923 = 24$). Opgaven met een groot verschil waren “drieterm – tweeterm = drieterm” aftrekkingen waarbij de aftrekker tussen 10 en 30 gelegen was (bijv., $827 - 14 = 813$). Tot slot omschreven we de opgaven met een middelmatig verschil als “drieterm – drieterm = drieterm” waarbij de aftrekker ongeveer gelijk was aan de helft van het aftrektal. Meer specifiek werd bij de helft van het aftrektal een willekeurig getal tussen 10 en 30 opgeteld of afgetrokken om de aftrekker te bereiken (bijv., $568 - 254 = 314$).

Voor de constructie van de concrete opgaven per reeks hanteerden we de volgende bijkomende criteria: (1) alle opgaven zijn aftrekkingen zonder enige overbrugging; (2) om alternatieve handige rekenstrategieën zo veel mogelijk te vermijden, komen eenheden

met als waarde 0, 1, 5 en 9 niet voorin het aftrektal, de aftrekker of het verschil; (3) binnen eenzelfde reeks komt een aftrektal, aftrekker of verschil slechts éénmaal voor; (4) de combinatie van tientallen en eenheden die van elkaar worden afgetrokken of worden opgeteld verschilt binnen de verschillende opgaven van eenzelfde reeks; (5) per reeks is er binnen elk opgavetype telkens één item waarbij het aftrektal start met 5, 6, 7, 8 en 9 als honderdtal. Tot slot zorgden we ervoor dat de grootte van het aftrektal en de aftrekker gemiddeld genomen even groot was in de A-reeks en de B-reeks. Voor de ordening van de opgaven binnen de A-reeks en B-reeks hanteerden we de volgende criteria: (1) geen herhaling van eenzelfde opgavetype op twee opeenvolgende trials; (2) geen herhaling van hetzelfde honderdtal op twee opeenvolgende trials. De beide reeksen opgaven zijn te vinden in Bijlage 1.

3.3 Conditie

Iedere leerling loste de opgaven zoals eerder vermeld op in twee geen-keuzecondities. In de ene conditie kregen de leerlingen tijdens de instructie de opdracht om alle opgaven op te lossen via direct aftrekken. In lijn met het eerder onderzoek en de instructie in de klas, moesten ze achtereenvolgens de honderdtallen, de tientallen en de eenheden van de aftrekker bij het aftrektal wegnemen (bijv. $964 - 512 = ?$; $964 - 500 = 464$, $464 - 10 = 454$, $454 - 2 = 452$). In de andere conditie kregen de leerlingen de opdracht om alle opgaven op te lossen via indirect optellen, en meer bepaald door bij de aftrekker achtereenvolgens honderdtallen, tientallen en tot slot eenheden toe te voegen om het aftrektal te bereiken en vervolgens de toegevoegde getallen op te tellen (bijv. $964 - 512 = ?$; $512 + 400 = 912$, $912 + 50 = 962$, $962 + 2 = 964$; $400 + 50 + 2 = 452$). Wij kozen voor deze variant van de indirecte optelstrategie – eerder dan voor bijvoorbeeld de variant waarbij de eerste stap bestaat uit het aanvullen van de aftrekker tot het eerstvolgende honderdtal, nl. $512 + 88 = 600$, zoals in onze eerdere studies waarin we de indirecte optelstrategie in een geen-keuze conditie hebben laten uitvoeren (zie bijv. Torbeys, Ghesquière, & Verschaffel, 2009),

omdat die in termen van de achtereenvolgens te zetten rekenstappen helemaal analoog was met de bovenvermelde variant van de directe aftrekstrategie en zo een faire vergelijking van beide strategieën mogelijk maakte.

Om maximaal te bewaken dat de leerlingen de gevraagde strategie gebruikten, vroegen we hen de opgaven op te lossen op de getallenlijn, zoals geïllustreerd in Figuur 1 en 2. Bovenaan elke pagina stond de opgave met daaronder de getallenlijn. De getallenlijn was voorzien van het vereiste aantal oplossingsstappen. Zowel boven elke boog als aan het einde van elke sprong stond een stippelijntje waarop de leerlingen de tussenstappen moesten noteren. Het startgetal stond in beide condities al op de correcte plaats vermeld. De leerlingen mochten geen enkele tussenstap overslaan en moesten de opgelegde volgorde van stappen aanhouden.

$$964 - 512 = \underline{\hspace{2cm}}$$



Figuur 1. Voorbeeld van de presentatie van de opgaven in de directe aftrekconditie.

$$964 - 512 = \underline{\hspace{2cm}}$$



Figuur 2. Voorbeeld van de presentatie van de opgaven in de indirecte optelconditie

3.4 Procedure

Alle leerlingen losten een reeks van 15 opgaven individueel op in de twee geen-keuzecondities. De ene helft van de leerlingen startte met indirect optellen en loste de opgaven daarna op via direct aftrekken. De andere helft kreeg de twee condities in de omgekeerde volgorde. In beide groepen startte de ene helft van de leerlingen met de A-reeks terwijl de andere helft met de B-reeks begon. Tussen

de twee condities zat voor elke leerling minimum één dag en maximum drie dagen.

Het concrete verloop van de afname was als volgt. In een apart lokaal kreeg de leerling van de proefleider een bundel met de geselecteerde opgaven, met telkens één opgave per pagina in de bundel. Bovenaan elke pagina stond de opgave en daaronder de getallenlijn met de representatie van de strategie (zie Figuur 1 en 2). Een pilootstudie had aan het licht gebracht dat een dergelijke strakke instructie bij aftrekopgaven zonder overbrugging van het tiental nodig was om te kunnen garanderen dat de leerlingen de vooropgestelde manier van werken zouden volgen.

Vooraleer het eerste experimentele item werd aangeboden, gaf de proefleider aan de hand van drie voorbeeldopgaven uitleg over de vereiste strategie en wat er door de leerling genoteerd (nl. de zes ontbrekende getallen op de stippellijntjes in de externe representatie) en gezegd (nl. het antwoord op de opgave) moest worden. De eerste voorbeeldopgave loste de proefleider zelf op, de tweede berekenden de proefleider en de leerling samen en de laatste loste de leerling zelfstandig op. Nadat de proefleider de leerling nogmaals gevraagd had of de te volgen rekenstrategie en notatiwijze voor de leerling duidelijk was (en een laatste demonstratie en uitleg indien dat niet het geval was), startte de leerling met de eerste van de 15 experimentele opgaven.

De registratie van de antwoorden en de antwoordsnelheid gebeurde via het computerprogramma Eprime 2.0 (Schneider, Eschman, & Zuccolotto, 2002). Op het moment dat de leerling het antwoord op de opgave helemaal uitgesproken had, drukte de proefleider op een toets en vulde zij vervolgens het antwoord van de leerling in. De gemeten oplossings tijd werd door de computer geregistreerd. Eventuele bijkomende informatie werd verder schriftelijk bijgehouden.

3.5 Analyses

Het oorspronkelijke databestand bevatte 1650 trials (55 leerlingen $\times$ 2 condities $\times$ 15 opgaven per conditie). We verwijderden trials waarbij er iets mis gegaan was bij het geven of noteren van het antwoord van de leerling of bij de registratie van de oplossings tijd. Dit

resulteerde in een finaal databestand met 1602 trials (= 97% van de originele trials) voor accuraatheid en 1582 trials (= 96% van de originele trials) voor reactietijd.

We toetsten onze contrastieve hypothesen betreffende de computationele superioriteit van de indirecte optelstrategie (onderzoeksvraag 1a en b) evenals onze onderzoeksvragen omtrent de rol van het subjectkenmerk “algemene rekenvaardigheid” (onderzoeksvraag 2a en b) en het taakkenmerk “grootte van het verschil tussen de termen” (onderzoeksvraag 3a en b) met behulp van twee ANOVA's met herhaalde metingen, met conditie (direct aftrekken vs. indirect optellen) en grootte van het verschil tussen de termen in de aftrekking (groot, middelmatig of klein) als binnen-subject factoren, rekenvaardigheid (onder- vs. bovengemiddeld) als tussen-subject factor en dit voor zowel accuraatheid (voor onderzoeksvraag 1a, 2a, 3a) en snelheid (voor onderzoeksvraag 1b, 2b, 3b) als afhankelijke variabelen.

Vooraf gingen we via éénwegs ANOVA's na of de volgorde van de condities (direct aftrekken of indirect optellen eerst) en of de volgorde van de opgavenreeksen (reeks A of reeks B eerst) een effect had op de accuraatheid en de snelheid van de oplossingen. In geen van beide analyses werd een volgorde-effect gevonden (alle p-waarden $> .05$).

4 Resultaten

4.1 Accuraatheid (onderzoeksvraag 1a, 2a en 3a)

De gemiddelde accuraatheid van de indirecte optel- en de directe aftrekstrategie per niveaugroep (onder- vs. bovengemiddeld) en per type oefening (klein, middelmatig of groot verschil) is weergegeven in Tabel 2.

We vonden een hoofdeffect van strategie voor accuraatheid, $F(1, 52) = 9.60$, $p = .003$. Net zoals in het vroeger onderzoek met opgaven met overbrugging, leidde het gebruik van de indirecte optelstrategie ($M = 98.1\%$) ook bij opgaven zonder overbrugging tot significant meer correcte antwoorden dan het gebruik van de directe aftrekstrategie ($M = 94.7\%$).

Tabel 2
Gemiddeld percentage correct opgeloste opgaven en standaarddeviatie per strategie, type oefening en niveaugroep

Niveau	Indirect optellen			Direct aftrekken		
	Klein	Middelmatig	Groot	Klein	Middelmatig	Groot
	—			—		
	M [SD]	M [SD]	M [SD]	M [SD]	M [SD]	M [SD]
Onder-gemiddeld	100.0 [0.0]	96.6 [9.7]	94.7 [16.0]	91.7 [12.6]	94.5 [9.1]	92.4 [14.6]
Boven-gemiddeld	99.2 [4.0]	99.2 [4.0]	99.2 [4.0]	99.2 [4.0]	92.8 [12.8]	97.6 [6.6]
	—			—		

Tabel 3
Gemiddelde antwoordtijd (seconden) en standaarddeviatie per strategie, type oefening en niveaugroep

Niveau	Indirect optellen			Direct aftrekken		
	Klein	Middelmatig	Groot	Klein	Middelmatig	Groot
	M [SD]	M [SD]	M [SD]	M [SD]	M [SD]	M [SD]
Onder-gemiddeld	17.4 [2.66]	24.42 [4.27]	24.22 [4.81]	17.01 [3.85]	20.05 [4.49]	14.19 [3.19]
Boven-gemiddeld	16.17 [3.52]	22.45 [4.78]	22.51 [4.89]	15.94 [3.98]	19.27 [4.68]	13.01 [2.48]

Er was eveneens een hoofdeffect van rekenniveau op de accuraatheid van de antwoorden, $F(1, 52) = 4.82, p = .03$. Bovengemiddelde leerlingen ($M = 97.9\%$) losten de opgaven significant vaker correct op dan ondergemiddelde ($M = 95.0\%$).

We vonden geen hoofdeffect van het type oefening op de accuraatheid van de antwoorden, $F(1.87, 97.07) = 1.55, p = .22$. Opgaven met een klein ($M = 97.5\%$), middelmatig ($M = 95.8\%$) en groot verschil tussen de termen ($M = 96.0\%$) werden ongeveer even vaak correct opgelost.

Verder was er geen significant interactie-effect tussen strategiegebruik en rekenvaardigheid, $F(1, 52) = 0.48, p = .49$, tussen strategie en opgaventype, $F(1.86, 96.78) = 0.50, p = .60$, of tussen opgaventype en rekenniveau, $F(1.87, 97.07) = 2.04, p = .14$.

Er was tenslotte ook geen driewegsinteractie van opgaventype, strategie en rekenniveau op accuraatheid, $F(1.86, 96.78) = 2.93, p = .06$.

4.2 Snelheid (onderzoeksvraag 1b, 2b en 3b)
De gemiddelde antwoordtijd van indirect optellen en direct aftrekken per niveaugroep en per type oefening is te vinden in Tabel 3.

De analyses brachten een hoofdeffect van strategie op antwoordtijd aan het licht, $F(1, 52) = 270.52, p < .01$, en wel in die zin dat – in tegenstelling tot wat in een aantal eerdere studies met opgaven met overbrugging vastgesteld was – indirect optellen tot een langere antwoordtijd leidde ($M = 21.27$ sec) dan direct aftrekken ($M = 16.62$ sec).

Verder vonden we geen hoofdeffect van rekenniveau op de antwoordtijd, $F(1, 52) = 1.81, p = .19$. Bovengemiddelde ($M = 18.22$ sec) en ondergemiddelde leerlingen ($M = 19.56$ sec) antwoordden ongeveer even snel.

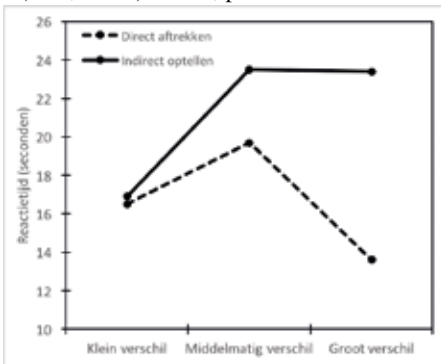
Er werd wel een hoofdeffect van opgaventype gevonden, $F(2, 52) = 217.81, p < .01$. Opgaven met een klein verschil tussen de termen ($M = 16.70$ sec) werden sneller opgelost dan de opgaven met een middelmatig verschil ($M = 21.60$ sec), $F(1, 52) = 371.67, p < .01$, en ook sneller dan opgaven met een groot verschil, $F(1, 52) = 63.65, p <$

.01. Verder werden de opgaven met een groot verschil ($M = 18.54$ sec) sneller opgelost dan de opgaven met een middelmatig verschil, $F(1, 52) = 182.62$, $p < .01$. Samengevat werden de opgaven met een klein verschil het snelst opgelost, gevolgd door opgaven met een groot verschil en tot slot opgaven met een middelmatig verschil.

Verder was er geen significant interactie-effect tussen strategie en rekenniveau, $F(1, 52) = 1.33$, $p = .25$. Direct aftrekken bleek in beide niveaugroepen sneller te verlopen dan indirect optellen.

We vonden echter wel een significant interactie-effect tussen strategie en opgaventype, $F(1.67, 86.99) = 205.67$, $p < .05$. Zoals Figuur 3 laat zien, was het verschil tussen direct aftrekken en indirect optellen verschillend voor de 3 opgavetypes. Het verschil tussen DA en IO was significant voor de opgaven met een groot verschil $t(53) = -22.43$, $p < .01$ en voor opgaven met een middelgroot verschil $t(53) = -10.90$, $p < .01$. Er was geen verschil tussen beide strategieën voor opgaven met een klein verschil $t(53) = -0.95$, $p = .35$.

Tenslotte was er geen significant interactie-effect tussen opgaventype en rekenniveau, $F(2, 104) = 0.16$, $p = .85$, en vonden we evenmin een drievoudig interactie-effect tussen strategie, opgaventype en rekenniveau, $F(1.67, 86.99) = 0.54$, $p = .55$.



Figuur 3. De gemiddelde antwoordsnelheid (seconden) per conditie (direct aftrekstrategie vs. indirecte optelstrategie) en opgaventype (klein, middelmatig of groot verschil tussen de termen)

5 Conclusie en discussie

Eerdere studies rond het gebruik van de directe aftrek- en de indirecte optelstrategie bij het hoofdrekkenend oplossen van aftrekkingen tot 1000 met het keuze/geen-keuze paradigma bij volwassenen en kinderen leidden tot de merkwaardige vaststelling dat volwassenen en kinderen de niet-aangeleerde indirecte optelstrategie nooit minder accuraat of snel toepasten dan de systematisch onderwezen en intens ingeoeffende directe aftrekstrategie. Integendeel, wanneer er verschillen in accuraatheid of snelheid tussen beide soorten aftrekstrategieën geconstateerd werden, waren die altijd in het voordeel van de indirecte optelstrategie. Dit was niet alleen het geval bij opgaven met een klein verschil tussen aftrektal en aftrekker zoals $804 - 792 = ..$, maar ook bij opgaven met een middelmatig en in sommige studies zelfs met een groot verschil tussen beide getallen (Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009; Torbeyns et al., 2011; Torbeyns & Verschaffel, 2013; Torbeyns et al., 2018). Omdat in al die onderzoeken echter enkel gebruik gemaakt werd van opgaven met overbrugging, bleef de vraag of dit resultaat ook terug te vinden zou zijn bij aftrekkingen tot 1000 zonder overbrugging, zoals $824 - 612 = ?$ Met deze studie trachtten we een antwoord te geven op deze vraag. Om deze strategie-efficiëntie nauwkeurig in kaart te brengen, kregen leerlingen van het zesde leerjaar, opgedeeld in een onder- en een bovengemiddelde groep, een serie van 15 aftrekopgaven met klein, middelmatig of groot verschil tussen de twee termen aangeboden in twee geen-keuzecondities: een conditie waarin ze alle opgaven via een directe aftrekstrategie moesten oplossen en een conditie waarin ze dat via de indirecte optelstrategie moesten doen.

Wat de accuraatheid van het strategiegebruik betreft, lieten onze resultaten zien dat het gebruik van indirect optellen tot meer juiste antwoorden leidde dan het gebruik van direct aftrekken (onderzoeksvraag 1a). Bovendien was dit zowel het geval bij de onder- als de bovengemiddelde leerlingen (onderzoeksvraag 1b) en bij de drie soorten opgaven met klein, middelmatig en groot ver-

schil (onderzoeksvraag 1c). Deze resultaten liggen dus helemaal in de lijn van de algemene conclusie van voorgaand onderzoek betreffende de computationele superioriteit van de indirecte optelstrategie, en bieden dus steun aan de hypothese dat de efficiëntie van de indirecte optelstrategie zich uitstrekt over zowel opgaven met als zonder overbrugging.

Wat de snelheid van strategie-uitvoering betreft, stelden we een omgekeerd patroon vast. Immers, in onze studie werden de aftrekkingen zonder overbrugging sneller opgelost via direct aftrekken dan via indirect optellen (onderzoeksvraag 2a). Verder vonden we die kortere antwoordtijden voor de directe aftrekking zowel bij de onder- als de bovengemiddelde leerlingen (onderzoeksvraag 2b). Tot slot troffen we die kortere antwoordtijden voor de directe aftrekking aan zowel bij de opgaven met middelmatig als met groot verschil tussen de twee gegeven getallen, terwijl de antwoordtijden voor de opgaven met een klein verschil niet verschilden (onderzoeksvraag 2c). Globaal genomen betekent dit dus dat – in tegenstelling tot de resultaten voor accuraatheid – de resultaten voor snelheid van strategie-uitvoering bij de aftrekkingen zonder overbrugging wel afwijken van wat er voor aftrekkingen met overbrugging is gerapporteerd. Meer bepaald bieden de snelheidsgegevens eerder steun aan de hypothese dat het fenomeen van de computationele superioriteit van de indirecte optelling enkel geldt voor aftrekkingen met overbrugging.

Deze resultaten vragen om een drie-voudige duiding. Vooreerst vormen onze accuraatheidsgegevens een belangrijke uitbreiding van het inmiddels goed gedocumenteerd fenomeen dat deelnemers – volwassenen zowel als kinderen – betere hoofdprestaties op aftrekkingen tot 1000 leveren wanneer ze gebruik maken van de niet-aangeleerde indirecte optelstrategie dan van de systematisch onderwezen en intensief ingeoefende directe aftrekstrategie. Op basis van onderhavige studie kunnen we immers besluiten dat dit gegeven niet enkel geldt voor de complexere aftrekkingen met overbrugging, maar ook voor de eenvoudigere aftrekopgaven zonder overbrugging. In

de artikelen over de vorige studies (waarin uitsluitend met opgaven met overbrugging is gewerkt) vinden we geen overtuigende verklaring voor dit resultaat, en ook onderhavig onderzoek brengt ons niet dichtbij een passende verklaring. Mogelijk biedt de intrinsieke eenvoud van het voorwaarts rekenen in vergelijking met het achterwaarts rekenen (naar analogie met het voorwaarts en achterwaarts tellen) hiervoor een verklaring (Verschaffel, 2003). Daarnaast kan ook het feit dat er – omwille van die vermeende eenvoud en primordialiteit van de optelling – in het elementair rekenonderwijs meestal met optellen wordt gestart en er daardoor mogelijk ook (bewust of onbewust) globaal genomen meer instructietijd uitgaat naar deze bewerking, een bijkomend verklarende element bieden (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Torbeyns et al., 2011), al is ons geen onderzoek bekend dat deze veronderstelling empirisch staft. Hoe dan ook, doordat eenvoudige optellingen beter gememoriiseerd en/of geautomatiseerd zijn dan aftrekkingen (Kilpatrick et al., 2001; Torbeyns et al., 2011), is de kans op fouten tijdens de uitvoering van de oplossingsstappen een indirecte optelling vermoedelijk kleiner dan bij een directe aftrekking.

Ten tweede vraagt de vaststelling dat indirect optellen – in tegenstelling tot in eerder onderzoek met aftrekopgaven met overbrugging – niet tot snellere oplossings-tijden leidde dan direct aftrekken (zelfs niet bij opgaven met een klein verschil tussen beide termen zoals $804 - 788 = ?$, die de indirecte optelstrategie het meest bevoor-de-len) om een verklaring. Wij vonden nu bij opgaven met een middelmatig en een groot verschil – maar niet bij de opgaven met een klein verschil – zelfs een omgekeerd resultaat: direct aftrekken was sneller dan indirect optellen bij deze twee typen van aftrekkingen. Een rationele analyse van het vereiste aantal oplossingsstappen bij de directe aftrekstrategie en de indirecte optelstrategie (zie Tabel 4) maakt alvast aannemelijk waarom we in deze studie bij opgaven zonder overbrugging met een groot en middelmatig verschil tussen de termen wel een verschil in antwoordtijden tussen indirect

optellen en direct aftrekken vaststelden, maar niet bij opgaven met een klein verschil: terwijl voor aftrekkingen met een groot en middelmatig verschil het aantal oplossingsstappen voor indirect optellen groter is dan voor direct aftrekken, is voor opgaven met een klein verschil het aantal stappen identiek voor beide strategieën (zie Tabel 4). Een belangrijke kanttekening hierbij is evenwel dat, zoals eerder aangegeven, zowel een directe aftrekking als een indirecte optelling op verschillende manieren kan worden uitgevoerd (Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009). Om de beide strategieën onderling zo goed mogelijk te kunnen vergelijken qua computationele efficiëntie, hebben we in deze studie voor beide soorten strategieën voor de uitvoeringsvariant gekozen waarbij er telkens achtereenvolgens met de honderdtallen, tientallen en eenheden van de aftrekker wordt gewerkt (zie Tabel 4) en hebben we die concrete variant via de taakinstructies en de presentatie van de opgaven aan de leerlingen opgelegd. De vraag is evenwel of dit ook de twee meest aangewezen uitvoeringsvarianten zijn vanuit het oogpunt van efficiëntie en van relevantie voor de praktijk van het elementair wiskundeonderwijs. Als we ons beperken tot het rijgen, is de gekozen uitvoeringsvariant voor de directe aftrekstrategie, waarbij het intacte aftrektaal achtereenvolgens verminderd wordt met de honderdtallen, tientallen en eenheden van de aftrekker, ongetwijfeld de meest aangewezen optie.

Voor indirect optellen is dat niet het geval; daar is de alternatieve rijgstrategie waarbij er in de eerste stap aangevuld wordt tot het volgende honderdtal ($654 - 368 = ?$ via $368 + 32 = 400$, $400 + 254 = 654$ en $32 + 254 = 286$) allicht efficiënter en meer voorkomend dan de uitvoeringsvariant waarvoor we in deze studie hebben gekozen. Maar, dit doet niets af aan de gevonden gunstige resultaten voor de indirecte optelstrategie. Integendeel, deze waren wellicht nog meer in het voordeel van het indirect optellen geweest indien we met die andere uitvoeringsvariant hadden gewerkt. Maar zoals in de inleiding uitgelegd kunnen aftrekkingen naast rijgend ook splitsend aangepakt worden. Opgaven zonder overbrugging van het tiental zoals $824 - 611 = ?$ zouden dan als volgt splitsend kunnen worden opgelost met beide strategieën:

- Splitsend direct aftrekken: $800 - 600 = 200$; $20 - 10 = 10$; $4 - 1 = 3$; $200 + 10 + 3 = 213$.
- Splitsend indirect optellen: $600 + 200 = 800$, $10 + 10 = 20$; $1 + 3 = 4$; $200 + 10 + 3 = 213$.

Het feit dat alle deelbewerkingen die bij splitsen gemaakt moeten worden allemaal erg eenvoudig zijn, maakt dat splitsen wellicht gemakkelijker, temeer omdat het mogelijk is om het verschil louter kolomsgewijs te bepalen zoals bij cijferrekenen ($2 - 1 - 1$, de uitkomst is 211). Het is dus goed mogelijk dat het (verplicht) gebruik van de splitsvariant van de directe aftrek- en/of indirecte optel-

Tabel 4
Stappen (aantal en aard) in het oplossingsproces bij direct aftrekken versus indirect optellen per opgaventype

Verschil ts termen	Voorbeeld	Directe aftrekking		Indirecte optelling	
		Aantal	Aard	Aantal	Aard
Klein	$677 - 654 = ?$	3	$677 - 600 = 77$ $77 - 50 = 27$ $27 - 4 = 23$	3	$654 + 20 = 674$ $674 + 3 = 677$ $20 + 3 = 23$
Middelmatig	$694 - 362 = ?$	3	$694 - 300 = 394$ $394 - 60 = 334$ $334 - 2 = 332$	4	$362 + 300 = 662$ $662 + 30 = 692$ $692 + 2 = 694$ $300 + 30 + 2 = 332$
Groot	$697 - 24 = ?$	2	$697 - 20 = 677$ $677 - 4 = 673$	4	$24 + 600 = 624$ $624 + 70 = 694$ $694 + 3 = 697$ $600 + 70 + 3 = 673$

strategie tot andere resultaten had geleid. Om een vollediger zicht te krijgen op de efficiëntie van de directe aftrek- versus de indirecte optelstrategie bij aftrekopgaven zonder overbrugging, is het dan ook nodig om deze studie te herhalen voor deze splitsende variant van de twee strategieën.

Ten derde rijst de vraag waarom we in onze studie tegenstrijdige resultaten vonden voor accuraatheid en snelheid van strategie-uitvoering. Onze interpretatie daarvan is dat de accuraatheid in de eerste plaats bepaald wordt door de aard van de te zetten stappen, terwijl antwoordtijd in de eerste plaats afhankelijk is van het aantal stappen dat moet worden gezet. Doordat de indirecte optelstrategie uitsluitend bestaat uit optellingen (zie Tabel 4), die, zoals hierboven vermeld, minder foutengevoelig zijn dan op aftrekken gebaseerde tussenstappen, is het aannemelijk dat deze strategie als geheel accurater wordt uitgevoerd dan de directe aftrekstrategie, wat ook de getalskenmerken van de opgaven zijn. Maar anderzijds zorgt het feit dat de indirecte optelstrategie bij twee van de drie soorten opgaven meer stappen telt dan de directe aftrekking, ervoor dat indirect optellen tot langere antwoordtijden leidt, behalve bij de opgaven met een klein verschil tussen de termen, waar het aantal stappen voor de twee strategieën hetzelfde is (zie Tabel 4).

Vervolgens bespreken we enkele methodologische kwesties. Ten eerste wijzen we er op dat we in onze studie een andere techniek hanteerden om het strategiegebruik van de leerlingen in de beide geen-keuzecondities te sturen dan in de vorige studies rond hoofd-rekenend aftrekken tot 1000. Om redenen die we eerder hebben toegelicht, hebben wij de leerlingen hun tussenstappen en -uitkomsten op een lege getallenlijn laten noteren terwijl in vorige studies de leerlingen hun oplossingsstrategie achteraf verbaal dienden te rapporteren. Deze aanpak heeft niet enkel als gevolg gehad dat we op die manier (doelbewust) de keuzevrijheid van de leerlingen wat de uitvoering van de directe aftrek- en indirecte optelstrategie sterk beperkt hebben, maar ook dat er in deze studie gewerkt is met een vorm van “Halbschriftliches Rechnen” (Wittmann & Müller, 1990-1992), terwijl het

in de vorige onderzoeken om puur hoofd-rekenen – in de betekenis van: in het hoofd rekenen, d.w.z. zonder hulp van pen en papier – ging. Dit bemoeilijkt de rechtstreekse vergelijking tussen de resultaten van deze studie (bij aftrekkingen zonder overbrugging) en die van de vorige onderzoeken (bij aftrekkingen met overbrugging). Daarom zou het interessant zijn om in toekomstig onderzoek de efficiëntie van direct aftrekken en indirect optellen bij zowel aftrekopgaven met en zonder overbrugging bij een en dezelfde groep subjecten en gebruikmakend van dezelfde onderzoeksmethode te bestuderen.

Een tweede methodologische bemerking slaat op de specifieke focus van het onderzoek. Het inzoomen op enkel de efficiëntie van het gebruik van de indirecte optel- versus directe aftrekstrategie (zonder ook de andere strategieparameters uit het model van Siegler en Lemaire (1997) – repertoire, frequentie en flexibiliteit – in het onderzoek te betrekken) liet een zeer systematische en fijnmazige studie van de efficiëntie van dit strategiegebruik toe. Maar het zou interessant zijn om in toekomstig onderzoek bij een en dezelfde groep leerlingen ook die andere aspecten van hun strategiegebruik in hun onderlinge samenhang te kunnen bestuderen. Een belangrijke uitdaging voor dergelijk meer omvattend onderzoek is de keuze van een aanbiedings- en antwoordvorm die voldoende ruimte laat voor variatie in de uitvoeringswijze van de directe aftrek- en indirecte optelstrategie.

Ten derde dient erkend te worden dat de omvang van de steekproef beperkt was en alle onderzochte leerlingen afkomstig waren uit slechts twee scholen waarin bovendien dezelfde wiskundemethode gehanteerd werd. Het zou daarom wenselijk zijn om toekomstig onderzoek te doen bij een omvangrijkere groep zesdeklassers uit een grotere variatie scholen waarin gewerkt wordt met een grotere diversiteit aan wiskundemethoden.

Ten slotte valt aan te bevelen het onderzoek uit te breiden naar verschillende leeftijdsgroepen. Zoals uit de accuraatheidsgegevens is gebleken, werden de aftrekkingen zonder overbrugging door de zesdeklassers heel vaak correct beantwoord, wat

mogelijk tot een plafond-effect heeft geleid. Ook al vonden we desondanks significante verschillen in accuraatheid voor de onderzochte variabelen (gehanteerde strategie, rekenniveau, en grootte van het verschil tussen de twee termen), het zou interessant zijn om de huidige studie te repliceren bij jongere kinderen en bij echt rekenzwakke kinderen voor wie deze opgaven allicht moeilijker zullen zijn. Daarbij kan best nog meer aandacht besteed worden aan individuele verschillen tussen kinderen, want het is aannemelijk dat de gerapporteerde bevindingen niet voor alle kinderen (uit de verschillende niveaugroepen) gelden.

We sluiten dit artikel af met een onderwijspraktische beschouwing. De vaststelling dat kinderen de niet-onderwezen indirecte optelstrategie over het algemeen accurater en sneller toepassen dan de systematisch aangeleerde en intensief ingeoefende directe aftrekstrategie bij aftrekkingen met overbrugging, en dat ook bij aftrekkingen zonder overbrugging indirect optellen accurater blijkt, roept vragen op bij de eenzijdige klemtoon die in de huidige praktijk van het hoofdrekenonderwijs op de directe aftrekstrategie wordt gelegd. Een belangrijke nuance hierbij is evenwel dat de bijkomende evidentie tegen deze praktijk die uit deze studie naar voren komt met de nodige kritische zin moet worden bekeken, omwille van de specifieke operationalisering die we aan de directe aftrek- en de indirecte optelstrategie hebben gegeven.

Literatuur

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 294-323. doi:10.2307/749464

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Student's flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93, 627-638. doi:10.1037/0022-0663.93.3.627

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fenema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudi-

dinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 3-20. doi: 10.2307/749715

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction*, 20, 205-215. doi:10.1016/j.learn-instruc.2009.02.020

Deloof, G. (2005). *LVS-VCLB Leerlingvolgsysteem. Wiskunde toetsen 6: Basisboek*. Antwerpen: Garant.

Duerloo, G., Jacobs, L., & Van Hijfte, J. (2016). *De Wiskanjers 6*. Mechelen: Plantyn.

Hatano, G. (2003). Foreword. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. xi-xiii). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: Adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education*, 41, 591-604. doi:10.1007/s11858-009-0205-5

Hickendorff, M., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. In A. Fritz, V. G. Haase, & P. Räsänen (Eds.), *International handbook of mathematical learning difficulties* (pp. 543-560). Springer Nature: Switzerland.

Imbo, I., Vandierendonck, A., & De Rammelaere, S. (2007). The role of working memory in the carry operation of mental arithmetic: Number and value of the carry. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 60, 708-731. doi:10.1080/17470210600762447

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443-464. doi:10.2307/749861

LeFevre, J. A., DeStefano, D., Penner-Wilger, M., & Daley, K. E. (2006). Selection of procedures in mental subtraction. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 60, 209-220. doi:10.1037/cjep2006020

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects

- of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124, 83-97. doi:10.1037/0096-3445.124.1.83
- Luwel, K., Onghena, P., Torbeyns, J., Schillemans, V., & Verschaffel, L. (2009). Strengths and weaknesses of the choice/no-choice method in research on strategy use. *European Psychologist*, 14, 351-362. doi:10.1027/1016-9040.14.4.351
- Peltenburg, M., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2011). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 – A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 351-369. doi:10.1007/s10649-011-9351-0
- Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Using addition to solve large subtractions in the number domain up to 20. *Acta Psychologica*, 133, 163-169. doi:10.1016/j.actpsy.2009.10.012
- Schneider, W., Eschman, A., & Zuccolotto, A. (2002). *E-Prime user's guide*. Pittsburgh: Psychology Software Tools, Inc. Geraadpleegd via <https://step.talkbank.org/materials/manuals/users.pdf>
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145-173. doi:10.1023/A:1014521221809
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hussmann, S. (2012). Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 389-408. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9305-6>
- Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126, 71-92.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 1-17. doi:10.1007/s10649-008-9155-z
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Peters, G., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2011). Use of indirect addition in adults' mental subtraction in the number domain up to 1000. *British Journal of Psychology*, 102, 585-597. doi:10.1111/j.2044-8295.2011.02019.x
- Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction*, 19, 1-12.
- Torbeyns, J., Peters, G., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2018). Subtraction by addition: strategy use in children of varying mathematical achievement level: A choice/no-choice study. *Journal of Numerical Cognition*, 2363-8761.
- Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: A choice/no-choice study. [Special issue]. *Research in Mathematics Education*, 15, 129-140.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (2001). *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff.
- Verschaffel, L. (2003). Waarom optellen gemakkelijker is dan aftrekken. In S. Speybrouck & K. Fillet (Red.), *Jongens en wetenschap* (pp. 350-362). Roeselare: Globe.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24, 335-359. doi:10.1007/BF03174765
- Wittmann, E.Ch., & Müller, G.N. (1990-1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Vols 1 & 2. Düsseldorf und Stuttgart, Germany: Klett Verlag.

Auteurs

Lieven Verschaffel is gewoon hoogleraar en verbonden aan het Centrum voor Instructiepsychologie en –technologie van de KU Leuven. **Heleen Vanaken** is afgestudeerd als master of science in de psychologie aan de KU Leuven. **Bert De Smedt** is hoofddocent en verbonden aan de onderzoekseenheid Gezins- en Orthopedagogiek van de KU Leuven. **Joke Torbeyns** is deeltijds tenure track docent en eveneens verbonden aan het Centrum voor Instruc-

tiepsychologie en –technologie van de KU Leuven.
Correspondentieadres: Lieven Verschaffel, KU
Leuven, Centrum voor Instructiepsychologie en –
technologie, Dekenstraat 2 pb 3773, 3000 Leuven :
E-mail : lieven.verschaffel@kuleuven.be

Abstract

The efficiency of indirect addition for solving subtractions up to 1000: also for subtractions without borrowing?

Previous research on mental subtraction with numbers up to 1000 has repeatedly demonstrated the superior efficiency of indirect addition to direct subtraction. That research, however, always used subtractions with borrowing (e.g., $814 - 786 = ?$). Therefore, we investigated the efficiency of indirect addition for subtractions without borrowing (e.g., $824 - 611 = ?$). Fifty-five pupils from the sixth grade, divided into an mathematically above-average and below-average group, received a series of 15 subtractions with a small, medium or large difference between minuend and subtrahend, offered in a no-choice direct subtraction and a no-choice indirect addition condition. Indirect addition led to more accurate solutions for both stronger and weaker pupils than direct subtraction. On the other hand, indirect addition in both groups was performed slower than direct subtraction, except on items with a small difference. These results require further research into the generalizability of these findings and their causes.

Keywords: mathematics education, mental arithmetic, adaptive expertise, choice/no-choice paradigm

Bijlage: Opgavenreeks A en B

Reeks A

K $677 - 654 = 23$
G $588 - 16 = 572$
K $947 - 923 = 24$
M $694 - 362 = 332$
K $756 - 743 = 13$
M $977 - 513 = 464$
G $797 - 24 = 773$
K $534 - 512 = 22$
G $827 - 14 = 813$
M $568 - 254 = 314$
G $956 - 22 = 934$
M $786 - 373 = 413$
K $898 - 882 = 16$
G $636 - 13 = 623$
M $858 - 442 = 416$

Reeks B

K $796 - 784 = 12$
M $574 - 312 = 262$
K $947 - 923 = 24$
G $878 - 16 = 862$
K $636 - 613 = 23$
M $988 - 474 = 514$
G $696 - 22 = 674$
K $578 - 552 = 26$
G $937 - 14 = 923$
M $846 - 434 = 412$
G $534 - 12 = 522$
M $796 - 413 = 383$
K $857 - 843 = 14$
M $697 - 334 = 363$
G $756 - 23 = 733$

Noot. K = klein verschil tussen de termen; M = middelmatig verschil tussen de termen; G = groot verschil tussen de termen