

Strategiegebruik bij rekenen afleiden uit het schriftelijk werk van basisschoolleerlingen.

M. F. Fagginger Auer, M. Hickendorff, en C. M. van Putten

Samenvatting

Verbale rapportages van strategiegebruik bij rekenen zijn niet altijd accuraat en kunnen het spontane strategiegebruik van leerlingen beïnvloeden. Ook beperken de tijd en moeite die het kost om verbale rapportages te verkrijgen de steekproefgroottes die haalbaar zijn. Deze nadelen spelen minder bij een niet-verbale methode van strategie-identificatie die geen inzet van geavanceerde extra middelen vereist: strategiegebruik is namelijk vaak af te leiden uit de berekeningen en tussenantwoorden die leerlingen uit zichzelf noteren. Zo kan er in het domein van bewerkingen onderscheid gemaakt worden tussen gebruik van cijferalgoritmes en kolomsgewijze algoritmes, verschillende meer informele strategieën en uit het hoofd rekenen. Resultaten van schriftelijke en verbale strategie-identificatie worden vergeleken bij de meest recente Nederlandse peiling van het rekenniveau aan het einde van de basisschool. Verder wordt de toepassing van schriftelijke strategie-identificatie geïllustreerd aan de hand van twee voorbeelden van wetenschappelijke onderzoeken. In de eerste toepassing wordt het strategiegebruik van leerlingen bij een nationale rekenpeiling gerelateerd aan de invulling van de rekenles door leerkrachten. In de tweede toepassing wordt het strategiegebruik van een grote groep leerlingen bij opgaven met en zonder context met elkaar vergeleken. Er wordt besloten met een bespreking van mogelijkheden en beperkingen van schriftelijke strategie-identificatie.

1 Inleiding

Onderzoek naar rekenstrategieën varieert van studies over de intuïtieve strategieën van jonge leerlingen (Ambrose, Baek, & Carpenter, 2003; Ginsburg & Pappas, 2004; Mulli-

gan & Mitchelmore, 1997) tot studies over de formele algoritmes die oudere leerlingen toepassen bij meer geavanceerde rekenopgaven (Selter, 2001; Van Putten, Van den Brom-Snijders, & Beishuizen, 2005). De keuzes voor bepaalde rekenstrategieën van leerlingen zijn in kaart gebracht als functie van de karakteristieken van de leerling, de opgave en de context van de taak (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009), en van de verschillen tussen strategieën in accuratesse en snelheid (Siegler & Shipley, 1995). Strategieën staan ook centraal in het rekenonderwijs: zowel internationaal als in Nederland hebben er in de afgelopen decennia hervormingen van het rekenonderwijs plaatsgevonden, waarbij er minder aandacht is gekomen voor algoritmes en meer voor flexibel strategiegebruik met inzicht (Gravemeijer, 1997a; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Kortom, zowel voor onderzoekers als voor de onderwijspraktijk zijn de rekenstrategieën van leerlingen van groot belang.

Meer inzicht krijgen in deze strategieën wordt echter bemoeilijkt door het feit dat ze niet direct observeerbaar zijn. Prestaties zijn dat wel: een gegeven antwoord kan direct worden beoordeeld als goed of fout en de tijd die het kost om een opgave op te lossen kan gewoonweg worden gemeten. De toepassing van een strategie speelt zich daarentegen grotendeels in het hoofd van de leerling af, onzichtbaar voor de onderzoeker. Een voor de hand liggende manier om meer te weten te komen over het strategiegebruik van een leerling is om hem of haar daar zelf over te laten rapporteren. Zulke verbale rapportages zijn dan ook een populaire methode van strategie-identificatie.

Verbale strategie-identificatie kent echter enkele problemen (Crutcher, 1994; Ericsson & Simon, 1980; Kirk & Ashcraft, 2001). Ten eerste is het de vraag of de verbale rapportages waarheidsgetrouw zijn (*veridicality*); het

kan zijn dat participanten niet in staat zijn om accuraat over hun strategiegebruik te rapporteren, zeker wanneer het oplossingsproces voor een belangrijk deel automatisch en daarmee onbewust verloopt. Ten tweede kunnen de verbale rapportages het strategiegebruik beïnvloeden (*reactivity*); wanneer participanten weten dat zij over hun oplossing ondervraagd zullen worden, kan het zijn dat ze andere strategieën kiezen dan normaal en ook dat ze meer hun best zullen doen voor een goed antwoord. Deze reactiviteit kan samenhangen met rekenniveau: Smith-Chant en LeFevre (2003) vonden in hun experiment alleen aanwijzingen voor reactiviteit bij de zwakkere rekenaars. Ten derde kan de opzet van het experiment de participanten het gevoel geven dat er van ze verwacht wordt dat ze bepaalde strategieën rapporteren, waarop het strategiegebruik zou kunnen worden aangepast (*demand induced bias*). Deze drie problemen met het gebruik van verbale rapportages vormen een ernstige bedreiging voor de validiteit van de strategie-identificatie. Daarnaast kent de verbale methode een praktisch probleem: het verzamelen van de verbale rapportages vereist één-op-één afnames met een getrainde proefleider, wat arbeidsintensief is en daarmee de steekproefgroottes die haalbaar zijn beperkt.

Een alternatief voor strategie-identificatie met verbale rapportages waarbij deze problemen minder spelen, is identificatie aan de hand van de uitwerkingen die leerlingen uit zichzelf noteren tijdens het rekenen. Bij rekenopgaven waarvan het antwoord niet direct uit het geheugen kan worden opgehaald – zoals in de bovenbouw van het basisonderwijs vaak het geval is – schrijven leerlingen namelijk vaak de stappen van hun berekening op papier. Dit kan zijn op de schematische wijze die wordt voorgeschreven door algoritmes, maar ook op een informele wijze van de leerling zelf, of met alleen maar het opschrijven van de belangrijkste tussenantwoorden. Vaak kan aan de hand van deze spontane notities worden vastgesteld welke strategie de leerling heeft gebruikt.

Het probleem van *veridicality* speelt hierbij in mindere mate, omdat leerlingen terwijl ze rekenen als natuurlijk onderdeel van hun

oplossingsproces de belangrijkste stappen die ze in hun hoofd maken opschrijven, en dit dus niet achteraf hoeven te reproduceren en verbaliseren. Wel geven schriftelijke uitwerkingen net zomin directe informatie over processen die onbewust verlopen als verbale rapportages. Verder is er van *reactivity* en *demand induced bias* geen sprake, omdat de leerlingen gewoon zoals normaal de opgaven op kunnen lossen: de strategie-identificatie gebeurt pas achteraf. De leerlingen hoeven dus niet eens te merken dat iemand hun strategiegebruik gaat bekijken en zullen dan ook hun strategiegebruik niet aanpassen in anticipatie daarvan of in een poging te voldoen aan de verwachtingen van de proefleider.

Al met al sluiten schriftelijke rapportages dus veel nauwer aan bij de rekenpraktijk van leerlingen dan verbale rapportages, omdat in rekenlessen het noteren van uitwerkingen veelvuldig aan de orde is (zowel op het bord als in het zelfstandig werk en bij toetsing), terwijl dat voor verbale rapportages minder het geval is. Het verkrijgen van een grote steekproef is met schriftelijke strategie-identificatie ook haalbaarder, omdat de dataverzameling in plaats van één-op-één ook in groepsverband kan, en niet door een proefleider getraind in het afnemen van verbale rapportages hoeft te gebeuren. De afname kan zelfs klassikaal door een leerkracht gedaan worden, als alle notities van de leerlingen later maar beschikbaar zijn voor de identificatie. Dit kan bevorderd worden door te zorgen voor voldoende schrijfruimte naast en onder iedere rekenopgave. Een stap verder gaat het verschaffen van een omkaderde notitieruimte bij elke rekenopgave (Van Putten et al., 2005).

Kortom, schriftelijke strategie-identificatie lijkt belangrijke voordelen te bieden ten opzichte van de verbale methode. Toch wordt deze techniek voor zover wij weten maar weinig toegepast. Het doel van dit artikel is daarom om een beeld te geven van de waarde die schriftelijke strategie-identificatie kan hebben voor wetenschappelijk onderzoek, en van hoe deze vorm van strategie-identificatie zich tot andere vormen verhoudt. Om dit doel te bereiken, wordt eerst een empirische vergelijking van verbale en schriftelijke strategie-identificatie gepresenteerd. Daarna worden

twee bestaande toepassingen van schriftelijke strategie-identificatie in onderzoek beschreven. Ten slotte wordt in de discussie aandacht besteed aan de nadelen van schriftelijke identificatie.

2 Vergelijking schriftelijke en verbale identificatie bij een nationale rekenpeiling

Een empirische vergelijking tussen strategie-identificatie op basis van verbale rapportages en op basis van schriftelijke uitwerkingen kan worden gemaakt bij de nieuwste Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) voor rekenen-wiskunde aan het einde van de basisschool in Nederland uit 2011 (Schelkens, Hemker, & Vermeulen, 2013). Hierbij maakte een deel van de leerlingen zowel opgaven in een individuele afname waarbij verbaal moest worden gerapporteerd, als klassikaal zonder verbale rapportage.

2.1 Methode

Er namen 2548 leerlingen uit groep 8 deel aan deze peiling, van scholen die geselecteerd waren op basis van random sampling met stratificatie op sociaaleconomische status. Aan een random selectie van 1619 van deze leerlingen werden drie of zes opgaven uit een totale set van dertien complexe vermenigvuldig- en acht complexe deelopgaven voorgelegd bij klassikale afnamen. Deze leerlingen hadden een gemiddelde leeftijd van 12,1 jaar en 51 procent van hen was een meisje. Van de leerlingen zou 50 procent na de zomer naar het VMBO gaan en de rest naar de havo of het VWO. Van 12 procent van de leerlingen hadden de ouders minder dan twee jaar middelbare school genoten.

Bij de complexe vermenigvuldig- en deelopgaven die de leerlingen maakten volgt het antwoord niet direct uit de tafels (zoals bij opgaven als 5×6 of $72 : 8$), maar moet met grotere getallen of kommagetallen gerekend worden (zoals bij opgaven als 24×19 of $23,70 : 3$). De meeste opgaven waren in een context geplaatst, bijvoorbeeld het eerlijk verdelen van € 23,70 over drie kinderen. Bij het oplossen van de opgaven mochten de leerlingen

geen extra kladpapier gebruiken, maar werden zij geïnstrueerd hun toetsboekjes te gebruiken voor het opschrijven van eventuele tussennotities en berekeningen. Hiervoor konden zij de vrije ruimte rondom de opgaven in het toetsboekje gebruiken; op elke bladzijde (A4-formaat) stonden slechts één tot drie opgaven. De schriftelijke uitwerkingen in de toetsboekjes werden achteraf gebruikt voor strategie-identificatie door de eerste en derde auteur van dit artikel en drie scriptiestudenten.

Aan de leerkrachten van de leerlingen die deelnamen aan de klassikale afnamen werd ook gevraagd uit deze leerlingen een benedengemiddelde, een gemiddelde en een bovengemiddelde rekenaar te selecteren voor individuele afnamen, waarbij nog twee complexe vermenigvuldig- en drie complexe deelopgaven werden voorgelegd. Dit resulteerde in een steekproef van 329 leerlingen, met een gemiddelde leeftijd van 12,1 jaar en waaronder 50 procent meisjes, 55 procent leerlingen die naar het VMBO zouden gaan, en 11 procent leerlingen met ouders die minder dan twee jaar middelbare school genoten hadden. De opgaven die aan de leerlingen werden voorgelegd waren niet dezelfde als in de klassikale afnamen, maar wel van hetzelfde type. Ook was er weer bij elke opgave ruimte om berekeningen en tussenantwoorden te noteren. De leerlingen losten de opgaven op in individuele sessies in de aanwezigheid van een proefleider, waarbij de proefleider de leerling na het oplossen van elke opgave vroeg hoe hij of zij dat had gedaan. Aan de hand van zowel de verbale rapportages aan de proefleider als de notities van de leerlingen werd het strategiegebruik geïdentificeerd; wanneer deze twee niet op dezelfde strategie wezen (wat bijna nooit voorkwam), gaf de verbale rapportage aan de proefleider de doorslag.

Tabel 1 geeft voorbeelden van drie van de strategiecategorieën die werden gehanteerd bij de strategie-identificatie. De eerste categorie is het traditionele cijferalgoritme, dat zowel voor vermenigvuldigen als delen bestaat uit voorgeschreven, efficiënte stappen met een vaststaande notatie. De tweede categorie is de kolomsgewijze aanpak, die bestaat uit een groter (vermenigvuldigen) of flexibel (delen)

aantal voorgeschreven stappen vergeleken met het cijferalgoritme, waarbij er meer nadruk ligt op de getalswaarde van de cijfers in de getallen waarmee gewerkt wordt (er wordt bijvoorbeeld expliciet stilgestaan bij dat de 1 in 19 staat voor een tiental in plaats van een eenheid). De derde categorie is niet-algoritmisch schriftelijk en bestaat uit strategieën waarbij wel schriftelijke notities worden gemaakt, maar niet volgens een aanpak met voorgeschreven stappen en schematische notatie, zoals het op eigen wijze splitsen van één of van twee getallen (vermenigvuldigen), opvermenigvuldigen (delen), of compenseren, herhaald optellen of halveren dan wel verdubbelen (beide). Hoewel deze strategieën - ondanks hun gedeelde niet-algoritmische aard - divers zijn, zijn ze hier samengevoegd in één categorie omdat er anders vele kleine categorieën zouden ontstaan (voor een uitgebreidere rapportage over de afzonderlijke niet-algoritmische strategieën, zie Fagginger Auer, Hickendorff, & Van Putten, 2013, en Fagginger Auer & Scheltens, 2012). De andere strategie-categorieën waren antwoorden zonder dat daarbij een uitwerking werd genoteerd, onduidelijke uitwerkingen, de opgave onbeantwoord laten en de toepassing van een verkeerde bewerking (bijvoorbeeld optellen in plaats van vermenigvuldigen).

Tabel 1
Voorbeelden van uitwerkingen van een complexe vermenigvuldig- en een complexe deelopgave in drie van de strategie-categorieën

strategie-categorie	vermenigvuldigen	delen
cijfer-algoritme	24	$3 / 23,70 \setminus 7,90$
	19x	21
	216	27
	240+	27
	456	0
koloms-gewijs	24	$23,70 : 3 =$
	19x	$15,00 - 5x$
	36	8,70
	180	$6,00 - 2x$
	40	2,70
	200+	$2,70 - 0,90x +$
	456	0 7,90x
niet-algo-ritmisch schriftelijk	$24 \times 20 = 480$	$3 \times 7 = 21$
	$480 - 24 = 456$	$3 \times 7,50 = 22,50$
		$3 \times 7,90 = 23,70$

2.2 Resultaten

Tabel 2 geeft de strategieën die de 329 leerlingen gebruikten om te vermenigvuldigen en delen bij de klassikale afnamen met schriftelijke identificatie en bij de individuele afnamen met verbale identificatie. De twee afnamen laten overeenkomsten, maar ook verschillen zien. Het gebruik van de gestandaardiseerde, algoritmische aanpakken lijkt onafhankelijk van de identificatiemethode: de proporties gebruik van cijferalgoritmes en de kolomsgewijze aanpak bij vermenigvuldigen en bij delen zijn ongeveer hetzelfde bij de schriftelijke en verbale identificatie. Ook is de proportie onduidelijke strategieën die niet geïdentificeerd konden worden vergelijkbaar. De proportie opgaven die beantwoord is zonder dat daarbij iets werd genoteerd en de proportie onbeantwoorde opgaven is echter meer dan twee keer zo groot bij schriftelijke als bij verbale identificatie. Bij verbale identificatie komen juist de niet-algoritmische schriftelijke strategieën vaker voor. Als leerlingen weten dat zij hun oplossing verbaal toe moeten zullen lichten, zijn zij dus blijkbaar meer geneigd om moeite te doen om een antwoord te vinden en om iets van hun oplossingsproces op papier te zetten, ook al is dat niet formeel gestructureerd volgens een algoritme.

Tabel 2 geeft ook de proportie goede antwoorden met elke strategie weer. Deze proportie ligt fors hoger voor de individuele afnamen dan de klassikale, wat zowel zou kunnen liggen aan een verschil in moeilijkheidsgraad tussen de verschillende opgaven bij de twee afnamen als aan meer inzet van de leerlingen in een één-op-één-setting. Wat opvalt is het bijzonder grote verschil in accuratesse tussen schriftelijke en verbale strategie-identificatie bij het antwoorden zonder schriftelijke uitwerking bij delen. Dit zou erop kunnen wijzen dat alleen sterkere rekenaars volharden in hun spontane keuze voor hoofdrekenen bij delen als zij weten dat zij verbaal moeten rapporteren over hun oplossing. Deze mogelijke verklaring wordt ondersteund door de aanwezigheid van meer leerlingen die naar de havo of het VWO zouden gaan onder degenen die kozen voor antwoord-

Tabel 2

Proportie gebruik en succes van verschillende vermenigvuldig- en deelstrategieën bij PPON 2011, op basis van schriftelijke uitwerkingen bij klassikale afnamen en verbale rapportages bij individuele afnamen.

strategie	proportie strategiegebruik				proportie goede antwoorden			
	schriftelijke identificatie		verbale identificatie		schriftelijke identificatie		verbale identificatie	
	x	÷	x	÷	x	÷	x	÷
cijferalgoritme	.36	.16	.38	.15	.66	.59	.88	.81
kolomsgewijs	.03	.26	.05	.28	.80	.68	.79	.83
niet-algo. schriftelijk	.25	.09	.44	.28	.55	.63	.72	.76
zonder uitwerking	.27	.32	.12	.17	.51	.22	.67	.89
onduidelijk	.01	.05	.01	.04	.18	.19	.00	.54
onbeantwoord	.07	.12	.00	.06	.00	.00	.00	.00
verkeerde bewerking	.00	.00	.00	.02	.00	.00	.00	.00

den zonder uitwerking bij de individuele vergeleken met de klassikale afnamen: respectievelijk 62 en 33 procent.

2.3 Conclusie

Al met al lijkt het op basis van deze resultaten van PPON onder leerlingen uit groep 8 dus zo te zijn dat de keuzes voor algoritmische strategieën (cijferend en kolomsgewijs) niet afhangen van of er verbaal gerapporteerd moet worden, maar dat verbale rapportage de keuze voor niet-algoritmische schriftelijke strategieën doet toenemen ten koste van het rekenen zonder uitwerking en het onbeantwoord laten van opgaven, in het bijzonder voor de minder sterke rekenaars. Ook werd er een stuk beter gepresteerd als er verbaal gerapporteerd moest worden.

Deze resultaten wijzen op *reactivity* dan wel *demand induced bias* door verbale rapportages (een onderscheid maken tussen deze twee is op basis van de huidige resultaten lastig): het verbaal moeten rapporteren over oplossingsstrategieën en waarschijnlijk ook de daarvoor noodzakelijke directe aanwezigheid van een proefleider lijken zowel spontane strategiekeuzes als prestaties te beïnvloeden. Net als bij Smith-Chant en LeFevre (2003) lijkt deze invloed samen te hangen met rekenniveau. Grote problemen met *validity* bij verbale rapportages kwamen niet naar voren: de verbale rapportages leken geen grote gaten te vertonen waarin zich belangrijke onbewuste processen zouden hebben afgespeeld en indien aanwezig, waren de schriftelijke notities bij de individuele afna-

men grotendeels in overeenstemming met de verbale rapportages.

3 Twee voorbeelden van de toepassing van schriftelijke strategie-identificatie

Aan de hand van twee bestaande studies illustreren we nu het gebruik van schriftelijke uitwerkingen voor strategie-identificatie. De eerste studie gaat over de relatie tussen de invulling van de rekenles door de leerkracht en het strategiegebruik van leerlingen bij de eerdergenoemde nationale peiling van het rekenniveau van leerlingen uit groep 8. De tweede studie gaat over de invloed van het aanbieden van rekenopgaven met of zonder context op het strategiegebruik en de prestaties van leerlingen.

3.1 Studie over de relatie tussen de invulling van de rekenles en strategiegebruik

De eerste studie is van Fagginger Auer, Hickendorff, Van Putten, Béguin, en Heiser (ingediend ter publicatie) en gaat over de relatie tussen rekendidactiek en strategiegebruik. De auteurs beschrijven het onderscheid tussen het formele, beoogde curriculum zoals dat vastligt in rekenmethodes en het informele, uitgevoerde curriculum zoals dat vorm krijgt in de klas. In de literatuur lijkt er vooral sprake van een verband tussen het informele curriculum en prestaties, maar deze bevinding is grotendeels gebaseerd op kleinschalige experimenten. Een waardevolle aanvulling hierop zou kunnen worden gevormd door

data van grootschalige peilingen van het onderwijsniveau te gebruiken. Hierbij is het ook interessant om naar een ander product van het rekenonderwijs te kijken dan prestaties: het rekenstrategiegebruik. De samenhang tussen instructie en strategiegebruik is in het bijzonder relevant in het licht van de nationale en internationale hervormingen van het rekenonderwijs, waarvan een centraal onderdeel minder aandacht voor algoritmes is, en meer aandacht voor flexibel strategiegebruik met inzicht.

Methode

Fagginger Auer et al. onderzochten het correlatieve verband tussen de invulling van de rekenles door 107 leerkrachten en het strategiegebruik van 1619 leerlingen uit groep 8 bij de nationale rekenpeiling PPON 2011 (zie de beschrijving van de steekproef bij de eerdere beschrijving van PPON 2011). De leerkrachten vulden een vragenlijst over hun rekeninstructie in, met vragen over welke rekenmethode ze gebruikten (Pluspunt, Wereld in Getallen, Rekenrijk, Alles telt of overige methoden) en over de instructie in het gebruik van rekenstrategieën, de algemene instructievormen in de rekenles, en de differentiatie van instructie naar rekenniveau van de leerlingen.

Het strategiegebruik van de leerlingen werd geïdentificeerd aan de hand van hun 4613 schriftelijke uitwerkingen bij de 13 complexe vermenigvuldigopgaven en 2852 uitwerkingen bij de 8 complexe deelopgaven (zie beschrijving van de opgaven en strategie-coderingen bij de eerdere beschrijving van PPON 2011). Er werden 112 vermenigvuldigen 112 deeltuitwerkingen dubbel gecodeerd door alle codeurs om de interbeoordelaarsbetrouwbaarheid van de coderingen vast te stellen. Deze bleek hoog, met een Cohen's kapp van .90 voor de vermenigvuldigopgaven en .89 voor de deelopgaven. De 21 strategievariabelen (één voor elke opgave) werden geanalyseerd met een multilevel latente-klasseanalyse, die leerlingen indeelt in groepen met soortgelijk strategiegebruik. De kans op lidmaatschap van elk van deze latente strategie-classes werd voorspeld aan de hand van leerlingkenmerken (als correctie voor de invloed

van leerlingkenmerken op het strategiegebruik), rekenmethode (als indicator van het formele, beoogde curriculum) en de scores op de leerkrachtvragenlijst (als indicatoren van het informele, uitgevoerde curriculum).

Resultaten

De strategiedata bleek het best te beschrijven met een model met vier latente strategie-classes. De klassen werden elk gekarakteriseerd door een hoge kans op het gebruik van één strategie per bewerking of zelfs bij beide bewerkingen: klasse 1 (30 procent van de leerlingen) antwoorde zonder uitwerking bij beide bewerkingen; klasse 2 (29 procent) vermenigvuldigen met het cijferalgoritme en delen met het kolomsgewijze algoritme; klasse 3 (22 procent) niet-algoritmische schriftelijke strategieën bij vermenigvuldigen en een gemengde aanpak bij delen; en klasse 4 (19 procent) het cijferalgoritme bij beide bewerkingen. Na correctie voor leerlingkenmerken, bleek rekenmethode een significante voorspeller van de kans dat een leerling in een bepaalde strategieklasse zat en dus een bepaald profiel van strategiekeuzes had. Deze voorspelling van klasselidmaatschap verbeterde nog verder met toevoeging van de scores op de leerkrachtvragenlijst voor strategie-instructie en algemene instructievormen aan het model, maar niet met die voor instructiedifferentiatie.

Tabel 3 geeft de verbanden tussen elk van de voorspellers en de kans op lidmaatschap van elk van de strategieclasses. De rekenmethode en gerapporteerde instructie bleken niet significant met elkaar samen te hangen. Leerlingkenmerken bleken vooral samen te hangen met de kans om in de 'zonder uitwerking'-klasse te zitten: deze kans was hoger voor jongens dan voor meisjes en voor leerlingen die naar het VMBO zouden gaan in plaats van naar de havo of het VWO. Bij rekenmethode werden de grootste verschillen gevonden bij de drie meest gebruikte methodes: bij Pluspunt was de kans op de 'niet-algoritmisch schriftelijk'-klasse groter vergeleken met het totaal; bij Wereld in Getallen de kans op deze klasse juist kleiner, maar de kans op de 'beide algoritmes'-klasse groter; en bij Rekenrijk was de kans op de 'beide

Tabel 3

Samenhang tussen strategiegebruik en leerlingkenmerken, rekenmethode en rekeninstructie in de studie van Fagginger Auer et al. (ingediend ter publicatie).

voorspeller	p-waarde	vergeleken met	verschil in kans op lidmaatschap klasse				
			klasse 1 (totale kans .30): geen uitwerking	klasse 2 (totale kans .29): cijferen. × koloms. +	klasse 3 (totale kans .22): niet-algo. schriftelijk	klasse 4 (totale kans .19): cijferend × en +	
leerlingkenmerken							
geslacht	<.001	jongens	meisje	+.30	-.15	-.04	-.11
formatie-gewicht	.07	0.3	0.0	+.13	-.07	-.04	-.02
middelbare-school-niveau	<.001	VMBO	havo/vwo	-.10	+0.03	+0.04	+0.03
rekenmethode							
methode	<.001	Plusp.	totaal	-.08	-.08	+.10	+0.06
		WiG	totaal	+0.05	+.15	-.11	-.09
		Rekenr.	totaal	+.15	-.10	.02	-.06
		Alles telt	totaal	-.04	-.00	+0.04	-.01
		overig	totaal	-.07	+0.07	-.05	+0.05
strategie-instructie							
cijferend vs. kolomsgew. ×	<.001	> gem.	< gem.	-.03	+.12	-.22	+.12
cijferend vs. kolomsgew. +	<.001	> gem.	< gem.	-.02	-.19	-.16	+.37
aandacht voor hoofdrekennen	.12	> gem.	< gem.	-.06	+0.01	+0.04	+0.01
meerdere vs. één strategie	<.001	> gem.	< gem.	+0.09	-.17	+0.00	+0.07
algemene instructievormen							
klassikale instructie	<.01	> gem.	< gem.	-.04	+0.09	+0.01	-.06
individuele instructie	.21	> gem.	< gem.	+0.04	-.06	+0.04	-.02
zelfstandig werken	<.01	> gem.	< gem.	+0.05	-.07	+0.03	-.01
actief leerlingen betrekken	<.001	> gem.	< gem.	-.02	-.04	+0.03	+0.00

Noot. De cellen geven het verschil in kans op lidmaatschap van een latente strategieklasse voor twee groepen leerlingen. Zo is bijvoorbeeld de kans om in klasse 1 te zitten .30 groter voor jongens dan voor meisjes. Verschillen van .10 of groter zijn schuin- en dikgedrukt.

algoritmes'-klasse kleiner en de kans op de 'zonder uitwerking'-klasse groter.

Bij strategie-instructie bleken leerlingen waarvan de leerkrachten bovengemiddeld in plaats van benedengemiddeld veel nadruk legden op kolomsgewijs vermenigvuldigen en delen, een grotere kans te hebben op lidmaatschap van de 'niet-algoritmisch schrifte-

lijk'-klasse, ten koste van de algoritmische klassen. Leerlingen waarbij er bovengemiddeld in plaats van benedengemiddeld veel nadruk lag op één in plaats van meer strategieën per type opgave hadden een grotere kans voor de 'beide algoritmes'-klasse. De aandacht voor hoofdrekennestrategieën hing niet significant samen met strategiegebruik. Bij algemene vormen van instructie hing stra-

tegiegebruik significant samen met de hoeveelheid groepsinstructie, zelfstandig werken en actief betrekken van leerlingen in de instructie significant, maar de samenhang was zwak. De hoeveelheid individuele instructie hing niet significant samen met strategiegebruik. De in het geheel niet significante variabelen voor instructiedifferentiatie hadden betrekking op de mate waarin de leerkracht het denken van leerlingen van verschillende niveaus begreep, de differentiatie van stof en tempo binnen de rekenles, en de extra ondersteuning binnen (bijvoorbeeld door remedial teachers) en buiten de school (bijvoorbeeld door ouders).

Conclusie

Uit deze resultaten werd geconcludeerd dat rekenstrategiegebruik zowel samenhangt met het formele, beoogde curriculum, zoals vastgelegd in de rekenmethodes, als met het informele, uitgevoerde curriculum, zoals gerapporteerd door leerkrachten zelf. Ook hing strategiegebruik sterk samen met kenmerken van de leerlingen. Het antwoorden zonder uitwerking – dat waarvan de toename in eerder onderzoek van Hickendorff, Heiser, Van Putten en Verhelst (2009) werd aangemerkt als een belangrijke oorzaak van de landelijke prestatiedaling bij vermenigvuldigen en delen – bleek ook in dit onderzoek weer het laagste percentage correcte antwoorden te hebben: 22 procent tegenover 50 procent met niet-algoritmische schriftelijke uitwerkingen en 61 en 63 procent met het cijferalgoritme en het kolomsgewijze algoritme. Antwoorden zonder uitwerking bleek vaker voor te komen bij jongens, leerlingen van VMBO-niveau en bij de rekenmethode Rekenrijk. Het informele curriculum leek niet samen te hangen met het gebruik van deze strategie, maar wel met de keuzes tussen algoritmische en niet-algoritmische geschreven strategieën (en deze keuzes hingen ook samen met de methode). Volgens de auteurs heeft deze bevinding van een aanzienlijke samenhang tussen instructie en strategiegebruik implicaties voor onderzoek naar het verband tussen rekenonderwijs en prestaties: strategieën bleken in eerder onderzoek sterk samen te hangen met prestaties, dus de effecten van onderwijs op prestaties

would (deels) gemedieerd kunnen worden door strategiegebruik. Voor een volledig beeld van de causale relaties tussen instructie en prestaties lijkt het dus belangrijk om strategieën als tussenliggende stap in beeld te brengen. Bij de resultaten van dit onderzoek dient wel opgemerkt te worden dat ze slechts correlatief zijn, en dat vervolgonderzoek nodig is om vast te stellen of bepaalde rekenmethoden en instructiewijzen niet alleen samengaan met bepaald strategiegebruik, maar dat strategiegebruik ook echt veroorzaakt.

Schriftelijke strategie-identificatie maakte het bij deze studie mogelijk om het verband tussen rekeninstructie en strategiegebruik te onderzoeken met een grote representatieve steekproef van leerkrachten en leerlingen, die nooit haalbaar was geweest als alle leerlingen individueel verbaal hadden moeten rapporteren over hun strategiegebruik. Deze grote steekproef vergroot de relevantie van de resultaten voor de hele populatie en maakte de geavanceerde data-analyse mogelijk. Verder kon door de schriftelijke identificatie het natuurlijke strategiegebruik van leerlingen onder normale toetsomstandigheden in kaart gebracht worden, zonder dat de leerlingen zich daar bewust van waren. Daarom was er van *reactivity* en *demand induced bias* geen sprake. Qua *veridicality* kunnen we er vrij zeker van zijn dat alle dingen die leerlingen opschreven daadwerkelijk onderdeel waren van hun oplossingsproces, omdat het opschrijven alleen voor de leerlingen zelf was en niet verplicht, en leken deze notities in de meeste gevallen een compleet beeld te geven van de belangrijkste karakteristieken van het oplossingsproces zonder dat daarbij grote onbewuste elementen leken te ontbreken. Bij antwoorden zonder uitwerking was dit natuurlijk niet het geval, en dat is meteen het grote nadeel van de schriftelijke strategie-identificatie.

3.2 Studie over de invloed van context in opgaven op strategiegebruik en prestaties

De tweede studie is van Hickendorff (2013) en gaat over het effect van het in een context plaatsen van rekenopgaven op het strategiegebruik en de prestaties van leerlingen. Zij

beschrijft hoe in Nederland zowel in de rekenmethodes als bij toetsing veel gebruik wordt gemaakt van contextopgaven, en hoe hier ook bij internationale peilingen in toenemende mate sprake van is. Het gebruik van een context zou zorgen voor motivatie, het op betekenisvolle wijze ontwikkelen van rekenkundige vaardigheden en concepten, en het leren hoe en wanneer rekenen in het dagelijks leven kan worden toegepast (zie bijvoorbeeld Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Bij het realistisch rekenen neemt het rekenen binnen een context een centrale plaats in, omdat dit leerlingen zou uitnodigen tot het gebruik van eigen, informele strategieën, waarop in het verdere onderwijs voortgebouwd kan worden (Gravemeijer & Doorman, 1999). Volgens sommigen kan een context een rekenopgave makkelijker maken door het uitlokken van zulke intuïtieve strategieën (zie bijvoorbeeld Gravemeijer, 1997b; Koedinger & Nathan, 2004), maar volgens anderen maakt een context opgaven juist moeilijker: er moet immers naast het rekenen ook nog de vertaling van de context naar het rekenprobleem gemaakt worden (Cummins, Kintsch, Reusser, & Weime, 1988; Wu & Adams, 2006). Zo wordt het veelvuldig gebruik van contextopgaven wel eens bekritiseerd met de opmerking dat rekenen zo meer begripdend lezen wordt.

Methode

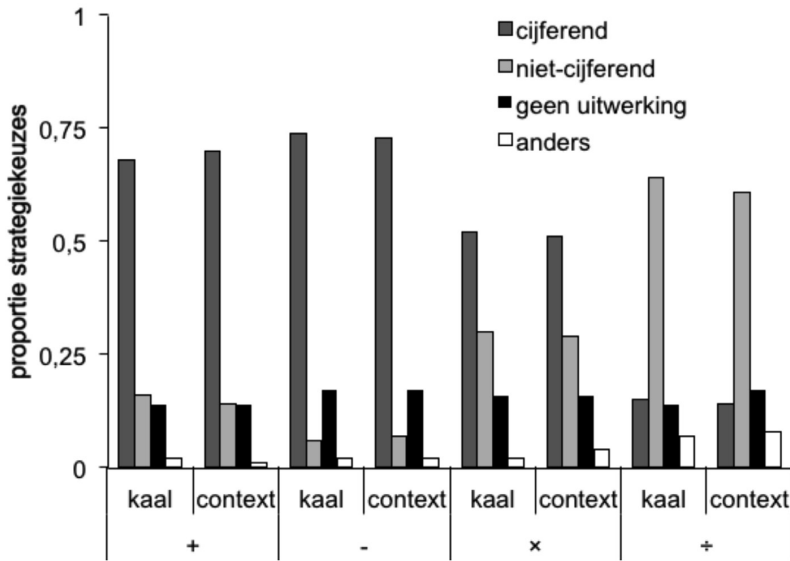
Hickendorff onderzocht daarom de effecten van de aanwezigheid van typische schoolse rekencontexten op strategiegebruik en prestaties. In deze studie maakten 685 leerlingen uit groep 8 van 24 basisscholen acht paren van opgaven. Elk paar bestond uit een originele contextopgave uit PPON 2004 en een 'kale' getalsopgave met zoveel mogelijk overeenkomstige getalskenmerken. Zo bestond een paar uit de kale opgave 37×24 en de contextopgave "Charles moet 36 bladzijden kopiëren. Hij heeft 27 kopieën van elke bladzijde nodig. Hoeveel kopieën zijn dat in totaal?". Voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen waren er elk twee paren opgaven, dus elke leerling maakte een set van zestien opgaven in totaal. Elke leerling maakte één van twee versies van deze opgavenset, waarbij in de ene versie van de set de acht opgaven

met context waren die in de andere versie zonder context waren.

Leerlingen werden geïnstrueerd dat als zij berekeningen en tussenantwoorden wilden noteren, zij dat konden doen in de ruimte die daarvoor in het opgavenboekje gereserveerd was. Op basis van de daaruit resulterende 10400 uitwerkingen van 650 leerlingen werd later het strategiegebruik gecodeerd in vier hoofdcategorieën: het cijferalgoritme; niet-cijferende strategieën (waarbij verder onderscheid gemaakt werd tussen kolomsgewijze en twee tot vier andere niet-cijferende strategieën per bewerking); geen uitwerking; en anders (waarbij verder onderscheid werd gemaakt tussen keuzes voor de verkeerde bewerking, onduidelijke strategieën en overgeslagen opgaven). Er werden 720 uitwerkingen van 45 leerlingen dubbel gecodeerd door twee onafhankelijke codeurs om de interbeoordelaars-betrouwbaarheid van de coderingen vast te stellen. Deze bleek hoog, met een Cohen's kappa van .82 voor de optelopgaven, van .79 voor de aftrekopgaven, van .89 voor de vermenigvuldigopgaven en .92 voor de deelopgaven.

Resultaten

Met multilevel multinomiale logistische regressie werd vervolgens het effect van het type bewerking (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen) en de aanwezigheid van een context (wel of niet) en hun interactie op strategiekeuze onderzocht. Het type bewerking had een groot effect, zoals ook te zien is in Figuur 1: optel- en aftrekopgaven werden overwegend cijferend opgelost, terwijl vermenigvuldigopgaven ook regelmatig niet-cijferend werden opgelost, en deelopgaven zelfs veel vaker niet-cijferend dan cijferend. Of een opgave wel of niet een context had, had echter geen effect op het strategiegebruik. Ook de interactie tussen bewerking en de aanwezigheid van een context was niet significant. Bij toevoeging van de variabelen geslacht, taalvaardigheid en thuistaal aan de regressie bleek ook geen van de interacties van deze leerlingkenmerken met de aanwezigheid van een context significant. Wel kozen meisjes en meer taalvaardige leerlingen in het algemeen vaker cijferende strategieën, terwijl jongens



Figuur 1. Proportie gebruik van strategieën per bewerking bij de kale opgaven en contextopgaven in de studie van Hickendorff (2013).

en minder taalvaardige leerlingen vaker antwoorden zonder uitwerking.

Met itemresponstheorie (IRT) werd de kans op een goed antwoord gemodelleerd met type bewerking en aanwezigheid van een context als item-predictoren en strategiekeuze als persoon-bij-item-predictor. Hiermee werd gevonden dat de strategieën verschilden in accuratesse en dat deze verschillen afhingen van het type bewerking: cijferende strategieën waren accurater dan niet-cijferende (behalve voor delen), en niet-cijferende strategieën waren accurater dan antwoorden zonder uitwerking (behalve voor aftrekken). De bewerkingsspecifieke accuratesseverschillen tussen strategieën hingen echter niet samen met de aan- of afwezigheid van een context. Bij verdere IRT-analyses werd gevonden dat er geen verschillende vaardigheidsdimensies voor het oplossen van opgaven met en zonder context te onderscheiden waren. Verder had de aanwezigheid van een context geen invloed op de moeilijkheidsgraad van optel-, aftrek- en vermenigvuldigopgaven, maar de deelopgaven met context waren iets moeilijker dan die

zonder (70 vs. 75 procent goede antwoorden). Ook hier was er geen significante interactie tussen de aanwezigheid van een context en de leerlingkenmerken geslacht, taalvaardigheid en thuistaal.

Conclusie

Uit deze resultaten werd geconcludeerd dat in deze studie de aanwezigheid van een context bij rekenopgaven geen invloed had op de strategiekeuzes van leerlingen, en ook niet op de accuratesse van de strategieën. De prestaties op de opgaven met en zonder context verschilden ook niet van elkaar. Deze resultaten suggereren dat de kritiek op het veelvuldig gebruiken van contextopgaven in toetsing als teveel een beroep doende op taalvaardigheden onterecht is – het lijkt immers niets uit te maken, ook niet voor de taalzwakkere leerlingen. Kanttekeningen zijn wel dat dit mogelijk alleen voor de leerlingen aan het einde van de basisschool geldt en dat de contextopgaven typisch schools waren, zonder redundante informatie en direct op te lossen met een enkele bewerking op de aanwezige getallen.

Methodologisch is relevant dat deze onderzoeksvraag – wat is de invloed van de

aanwezigheid van een context bij het toetsen van rekenvaardigheden – eigenlijk enkel met schriftelijke strategie-identificatie te beantwoorden is: omdat de leerlingen deze rekentaak als een gewone (Cito-)rekenoets maakten was de ecologische validiteit maximaal, terwijl verbale rapportages voor een sterke afwijking van normale toetsomstandigheden hadden gezorgd. Van *veridicality*, *reactivity* en *demand induced bias* was dan ook geen sprake, terwijl met verbale strategie-identificatiemethoden het niet mogelijk was geweest de resultaten te generaliseren naar de algemene toetsituatie. Ook was het door de schriftelijke strategie-identificatie mogelijk een grote (en representatieve) steekproef van leerlingen te onderzoeken, wat de generaliseerbaarheid van de conclusies ondersteunt en daarnaast geavanceerde analyses mogelijk maakte. Nadeel is wel dat de onderzoekers de strategie moesten afleiden enkel uit wat de leerlingen spontaan hadden opgeschreven, wat onmogelijk was als er weinig tot niet genoteerd stond of als wat er stond onduidelijk was.

4 Discussie

Rekenstrategieën hebben een grote relevantie voor onderzoek en voor de onderwijspraktijk, maar hun gebruik is niet direct observeerbaar. Daarom wordt leerlingen vaak gevraagd hierover verbaal te rapporteren. Eerder onderzoek suggereert echter dat deze verbale rapportages inaccuraat kunnen zijn (*veridicality*) en dat strategiekeuzes en prestaties beïnvloed kunnen worden door het moeten rapporteren (*reactivity*) en door de verwachtingen die het onderzoek schept bij de leerlingen (*demand induced bias*). Ook beperken de tijd en moeite die het kost om verbale rapportages te verkrijgen de steekproefgroottes die haalbaar zijn. Deze problemen spelen minder wanneer de notities die leerlingen uit zichzelf maken tijdens het rekenen gebruikt worden voor schriftelijke strategie-identificatie. Wat betreft *veridicality* zijn deze spontane notities waarheidsgetrouw omdat ze een integraal onderdeel van het oplossingsproces zelf zijn en niet achteraf worden gereproduceerd en geverbali-

seerd, al verschaffen ze natuurlijk net zomin als verbale rapportages informatie over onbewuste processen. *Reactivity* en *demand induced bias* spelen niet bij schriftelijke strategie-identificatie, omdat leerlingen net als normaal de opgaven oplossen: het noteren van uitwerkingen is een natuurlijk onderdeel van hun rekenen en de strategie-identificatie kan achteraf zonder medeweten van de leerlingen plaatsvinden. Ten slotte zijn één-op-één-afnames met een getrainde proefleider niet nodig bij schriftelijke identificatie, wat grote steekproeven haalbaar maakt. Deze punten werden in dit artikel geïllustreerd aan de hand van een empirische vergelijking van schriftelijke met verbale strategie-identificatie en twee toepassingen in wetenschappelijk onderzoek.

De empirische vergelijking werd gedaan op basis van data van de nieuwste peiling van het rekenniveau van leerlingen uit groep 8, waarbij een deel van de leerlingen zowel opgaven in de klas maakte waarop later schriftelijke identificatie werd toegepast, als opgaven die één-op-één werden afgenomen met een toetsleider waaraan de strategieën na elke opgave verbaal werden gerapporteerd. De keuzes voor algoritmische strategieën leken hierbij niet af te hangen van of er verbaal gerapporteerd moet worden, maar verbale rapportage leek de keuze voor niet-algoritmische schriftelijke strategieën te doen toenemen ten koste van het antwoorden zonder uitwerking en het onbeantwoord laten van opgaven, in het bijzonder voor de minder sterke rekenaars. Ook werd er een stuk beter gepresteerd als er verbaal gerapporteerd moet worden. Een verschil in accuratesse werd ook gevonden bij eerdere individuele en klassikale afnamen van PPO 2004, terwijl daarbij niet dezelfde leerlingen andere opgaven maakten bij de twee afnamen zoals in 2011, maar juist andere leerlingen dezelfde opgaven (Van Putten & Hickendorff, 2006). Verbale rapportages lijken dus inderdaad de spontane strategiekeuzes en prestaties te beïnvloeden ten opzichte van normale klassikale afnameomstandigheden, in overeenstemming met de verwachte *reactivity* dan wel *demand induced bias* van Kirk en Ashcraft (2001). Net als bij Smith-Chant en LeFevre (2003) trad de beïn-

vloeding vooral op bij de minder sterke rekenaars. De keuze van identificatie-techniek kan dus de verschillen tussen leerlingen met een verschillende vaardigheid vertekenen. Duidelijke aanwijzingen voor problemen met *veridicality* kwamen niet naar voren.

De twee besproken toepassingen van schriftelijke strategie-identificatie in onderzoek illustreren een aantal punten. Ten eerste laten ze zien dat deze vorm van strategie-identificatie mogelijk is met een goede interbeoordelaarsbetrouwbaarheid. Bij elk van de bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) kon er goed onderscheid gemaakt worden tussen algoritmes en tussen verschillende informele strategieën: bij beide studies lagen de Cohen's kappas voor de identificatie van deze strategieën rond de .80 en .90. Ten tweede laten ze zien dat een grote (representatieve) steekproef haalbaar is met deze techniek: in de eerste studie werden 7465 toepassingen van strategieën van 1619 leerlingen geïdentificeerd, en in de tweede studie 10400 strategieën van 650 leerlingen. Dit biedt uitgebreidere mogelijkheden voor meer geavanceerde data-analyse-technieken, zoals beide studies ook demonstreren, en ondersteunt de generaliseerbaarheid van de conclusies van de studies. Ten slotte laten de toepassingen zien dat schriftelijke identificatie breed toepasbaar is, zowel bij meer descriptieve als bij meer experimentele studies, en bij het vinden van antwoorden op vragen uit zowel de theorie als uit de onderwijspraktijk.

4.1 Nadelen van schriftelijke strategie-identificatie

Naast deze voordelen, kent schriftelijke strategie-identificatie echter ook enkele nadelen. Een groot nadeel is dat alle onderdelen van het oplossingsproces die niet genoteerd zijn, onbekend blijven. Bij minimale notities is vaak nog wel af te leiden welke strategie een leerling gebruikt heeft (bijvoorbeeld wanneer bij een opgave als 19×24 alleen de tussenstap 480 staat genoteerd, wijst dat op een compensatiestrategie), maar wanneer elke notitie ontbreekt blijft het oplossingsproces volledig onbekend. Het kan zijn dat leerlingen dan gebruik hebben gemaakt van hoofdrekenen, maar ook dat ze maar wat hebben gegokt. Hic-

kendorff, Van Putten, Verhelst en Heiser (2010) ondervroegen daarom leerlingen na een gewone klassikale afname over welke strategieën zij hadden gebruikt wanneer zij geen notities hadden gemaakt. Gokken en schatten werd bij maar een paar procent van de oplossingen gerapporteerd, en bij het verdere hoofdrekenen werd in vergelijking met schriftelijke oplossingen veel vaker een compensatiestrategie gerapporteerd. Fagginger Auer en Scheltens (2012) vonden soortgelijke resultaten voor het strategiegebruik wanneer geen uitwerking was genoteerd bij individuele afnamen. Op basis van deze resultaten lijkt het er dus op dat leerlingen wanneer zij geen uitwerking noteren in de meeste gevallen serieus hoofdrekenen en relatief vaak een slimme, makkelijk hoofdrekenend uit te voeren strategie gebruikt hebben.

Deze bevinding is in tegenspraak met de lage accuratesse van het antwoorden zonder uitwerking die gevonden wordt bij klassikale afnamen bij nationale peilingen van het rekenniveau (Fagginger Auer et al., 2013). Een waarschijnlijke oorzaak van deze tegenstelling ligt in het verschil in motivatie van leerlingen in verschillende omstandigheden: bij een klassikale toetsafname zonder verdere gevolgen voor de leerling zelf is de prestatie-motivatie lager dan wanneer de leerling direct zijn oplossing moet toelichten aan een proefleider. Dat is ook zichtbaar in de betere prestaties bij de individuele vergeleken met de klassikale afnamen bij dezelfde leerlingen in PPO 2011 in dit artikel, en is in lijn met de verschillen tussen *low-stakes* en *high-stakes assessments* die worden beschreven in de literatuur (zie bijvoorbeeld Wise & DeMars, 2005). Al met al is de interpretatie van het antwoorden zonder uitwerking dus niet eenduidig, vooral omdat motivatie hierin een belangrijke rol lijkt te spelen, en dat is een groot nadeel van schriftelijke strategie-identificatie. Het probleem zou wellicht kunnen worden verminderd door de motivatie bij *low-stakes* omstandigheden te verhogen (bijvoorbeeld zoals beschreven door Wise & DeMars, 2005). Bovendien moet worden bedacht dat antwoorden zonder uitwerking in een minderheid van de gevallen gebeurt, ook bij *low-stakes* omstandigheden.

Een ander belangrijk nadeel van schriftelijke strategie-identificatie is dat deze methode niet geschikt is voor alle typen rekenopgaven. Hoewel bij de toepassingen in dit artikel de mogelijkheden voor zowel optellen, aftrekken, vermenigvuldigen als delen zijn gedemonstreerd, geldt dat de methode uiteraard alleen geschikt is voor de soorten rekenen waarbij notities worden gemaakt. Wanneer rekenopgaven zo simpel zijn dat ze opgelost kunnen worden door *retrieval* (het antwoord kan direct uit het geheugen worden opgehaald) of met behulp van slechts één of enkele simpele rekenstappen, zullen er maar weinig notities gemaakt worden en blijft dus het grootste gedeelte van het strategiegebruik onrijpbaar voor schriftelijke identificatie. Deze vorm van identificatie is dus alleen informatief wanneer de opgaven voldoende gevorderd zijn voor het rekenniveau van degenen waaraan de opgaven worden aangeboden. Hierbij zou opgemerkt kunnen worden dat het nut van het handmatig uit kunnen rekenen van complexere opgaven in de huidige tijd discutabel is, maar het uitvoeren van bewerkingen met grotere getallen en kommagetallen is desalniettemin nog altijd één van de vaardigheden die kinderen aan het einde van de basisschool zouden moeten beheersen, volgens concretisering van de recent geformuleerde referentieniveaus waar het Nederlandse onderwijs aan gebonden is (Noteboom, 2009).

Verder is het zo dat schriftelijke strategie-identificatie het voordeel heeft dat een getrainde proefleider niet vereist is bij het verzamelen van de data, maar voor het identificeren van de strategieën achteraf zijn wel getrainde codeurs nodig. In onze ervaring is het trainen van het coderen van strategieën goed mogelijk in een groepsbijeenkomst, waarbij eerst voorbeelden van de verschillende strategieën worden besproken, dan groepsgewijs uitwerkingen worden gecodeerd, en ten slotte zelfstandig wordt gecodeerd onder supervisie en met mogelijkheid tot het stellen van vragen. Het succes van de training kan vervolgens eenvoudig worden vastgesteld door iedereen compleet zelfstandig eenzelfde set uitwerkingen te laten coderen en de overeenstemming tussen deze coderingen en de volgens de leider van het onderzoek juiste coderingen te bepalen.

Ten slotte is een nadeel van schriftelijke strategie-identificatie dat wanneer een uitwerking onduidelijk is, er niet meer om verheldering gevraagd kan worden. Wanneer een leerling aan een proefleider uitlegt hoe hij of zij een opgave heeft opgelost, kan de proefleider dit natuurlijk wel doen. In de vergelijking van verbale en schriftelijke strategie-identificatie in dit artikel is het percentage onduidelijke oplossingen bij beide methodes echter vrijwel identiek. Wellicht is het voor een deel van de leerlingen simpelweg te lastig om uit te leggen hoe ze iets uitgerekend hebben, ook wanneer hier nadere vragen over gesteld worden. In de praktijk zou de impact van dit nadeel dus beperkt kunnen zijn.

4.2 Implicaties

Dit artikel heeft getracht een beeld te geven van de mogelijkheden en beperkingen - zowel praktisch als met betrekking tot validiteit - van identificatie van rekenstrategiegebruik aan de hand van spontane schriftelijke uitwerkingen. Op belangrijke punten lijkt schriftelijke strategie-identificatie voordelen te hebben ten opzichte van verbale methoden, maar tot op heden wordt de laatste techniek veel vaker in onderzoek toegepast dan de eerste. Een implicatie hiervan is dat onderzoekers die verbale identificatie toepassen bewust stil zouden moeten staan bij de prijs die ze daarvoor mogelijk betalen in termen van praktische beperkingen en validiteitsproblemen, en na zouden kunnen denken over wat schriftelijke identificatie ze zou kunnen bieden. Ook in de onderwijspraktijk zou schriftelijke identificatie een belangrijkere rol kunnen spelen: wanneer leerkrachten het werk van leerlingen nakijken, zouden ze daarbij relatief eenvoudig de resultaten wat betreft accuratesse kunnen verdiepen door die te relateren aan het strategiegebruik. Aan de hand daarvan zou de rekeninstructie efficiënter kunnen worden gemaakt door strategie-instructie toe te snijden op de actuele situatie.

De resultaten hebben bredere implicaties dan voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen alleen. Zo zou schriftelijke identificatie ook toegepast kunnen worden bij andere gebieden binnen rekenen-wiskunde waarbij notities worden gemaakt, zowel op

basisschoolniveau (bijvoorbeeld bij breuken, procenten en verhoudingen) als op meer gevorderd niveau (bijvoorbeeld bij vergelijkingen oplossen). Ook kan er gedacht worden aan gebieden buiten de rekenen-wiskunde. Zo zou bij spellen bijvoorbeeld uit notities kunnen blijken of een woordbeeldstrategie is toegepast, waarbij verschillende schrijfwijzen worden uitgeprobeerd, of een analogiestrategie, waarbij het te spellen woord wordt vergeleken met soortgelijke woorden. Ook zou gedacht kunnen worden aan (complexere) strategieën bij het schrijven van teksten, waarbij veel kladnotities worden gemaakt.

Al met al hopen wij andere onderzoekers enthousiast te hebben gemaakt voor schriftelijke strategie-identificatie, en we kijken uit naar vruchtbare nieuwe toepassingen ervan.

Literatuur

- Ambrose, R., Baek, J.-M., & Carpenter, T.P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (p. 305-336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Crutcher, R. J. (1994). Telling what we know: the use of verbal report methodologies in psychological research. *Psychological Science*, 5, 241-244.
- Cummins, D.D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review*, 87, 215-251.
- Ginsburg, H. P., & Pappas, S. (2004). SES, ethnic, and gender differences in young children's informal addition and subtraction: A clinical interview investigation. *Applied Developmental Psychology*, 25, 171-192.
- Gravemeijer, K. P. E. (1997a). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer, & E. C. D. M. Van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (p. 13-34). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K. (1997b). Commentary. Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7, 389-397.
- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *ducational Studies in Mathematics*, 39, 111-128.
- Fagginger Auer, M. F., Hickendorff, M., & Van Putten, C. M. (2013). Strategiegebruik bij het oplossen van vermenigvuldig- en deelopgaven. In F. Scheltens, B. Hemker, & J. Vermeulen (Eds.), *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 5* (pp. 158-167). Arnhem: Cito.
- Fagginger Auer, M. F., Hickendorff, M., Van Putten, C. M., Béguin, A. A., & Heiser, W. J. (ingediend ter publicatie). *Applying multilevel latent class analysis to large-scale educational assessment data: predicting students' mathematical strategy choices from teachers' instructional practice*.
- Fagginger Auer, M. F., & Scheltens, F. (2012). Oplossingsstrategieën voor deel- en vermenigvuldigopgaven in groep 8. In M. van Zanten (Ed.), *Opbrengstgericht onderwijs – rekenen/wiskunde?* (pp. 137-150). Utrecht: Flsme, Universiteit Utrecht.
- Hickendorff, M. (2013). The effects of presenting multidigit mathematics problems in a realistic context on sixth graders' problem solving. *Cognition and Instruction*, 31, 314-344.
- Hickendorff, M., Heiser, W. J., Van Putten, C. M., & Verhelst, N. D. (2009). Solution strategies and achievement in Dutch complex arithmetic: Latent variable modeling of change. *Psychometrika*, 74, 331-350.
- Hickendorff, M., Van Putten, C. M., Verhelst, N. D., & Heiser, W. J. (2010). Individual differences in strategy use on division problems: mental versus written computation. *Journal of Educational Psychology*, 102, 438-452.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Kirk, E. P., & Ashcraft, M. H. (2001). Telling stories: The perils and promise of using verbal reports to study math strategies. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 27, 157-175.

- Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences*, 13, 129–164.
- Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309–330.
- Noteboom, A. (2009). *Fundamentele doelen rekenen-wiskunde: Uitwerkingen van het fundamenteel niveau 1F voor einde basisonderwijs, versie 1.2*. Enschede: SLO, Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling.
- Scheltens, F., Hemker, B., & Vermeulen, J. (2013). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 5*. Arnhem: Cito.
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145–173.
- Siegler, R. S., & Shipley, C. (1995). Variation, selection, and cognitive change. In G. Halford & T. Simon (Eds.), *Developing cognitive competence: New approaches to process modeling* (p. 31–76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Smith-Chant, B. L., & LeFevre, J.-A. (2003). Doing as they are told and telling like it is: Self-reports in mental arithmetic. *Memory & Cognition*, 31, 516–528.
- Van Putten, C. M., & Hickendorff, M. (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Panama-post*, 25, 16–25.
- Van Putten, C. M., Van den Brom-Snijders, P. A., & Beishuizen, M. (2005). Progressive mathematization of long division strategies in Dutch primary schools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 44–73.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557–628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24, 335–359.
- Wise, S. L., & DeMars, C. E. (2005). Low examinee effort in low-stakes assessment: Problems and potential solutions. *Educational Assessment*, 10, 1–17.
- Wu, M., & Adams, R. (2006). Modelling mathematics problem solving item responses using a multidimensional IRT model. *Mathematics Education Research Journal*, 18, 93–113.

Auteurs

Marije F. Fagginger Auer en **Cornelis M. van Putten** zijn verbonden aan de afdeling Methodologie en Statistiek, Instituut Psychologie van de Universiteit Leiden en **Marian Hickendorff** aan de afdeling Onderwijsstudies, Instituut Pedagogische Wetenschappen van de Universiteit Leiden.

Correspondentieadres:

m.f.fagginger.auer@fsw.leidenuniv.nl

Abstract

Inferring mathematical strategy use from primary school students' written work

Verbal reports of mathematical strategy use can be inaccurate and can influence students' spontaneous strategy choices, and the effort involved in collecting them limits sample sizes. These disadvantages can be overcome with a straightforward non-verbal method: students' strategy use can often be inferred from the calculation steps that they write down as a natural part of their solution process. In this study, results of verbal and written strategy identification are compared in a recent large-scale mathematics assessment. In addition, the application of written strategy identification is illustrated with two examples. The first application is a study in which students' strategy use on a large-scale assessment was related to their teachers' mathematics instruction. The second application is a study which compared the strategy use of a large group of students on problems presented with and without a realistic context. Finally, the possibilities and limitations of written strategy identification are discussed.