Het flexibel gebruik van de indirecte optelstrategie bestudeerd via de analyse van reactietijden

G. Peters, B. De Smedt, J. Torbeyns, P. Ghesquière, en L. Verschaffel

Samenvatting

Deze bijdrage gaat over het gebruik van reactietijdanalyses om patronen in strategiegebruik bij elementaire aftrekopgaven te identificeren, met speciale aandacht voor de indirecte optelstrategie. Eerder onderzoek toonde aan dat volwassenen deze indirecte optelstrategie vaak rapporteren, terwijl kinderen dit slechts zelden doen. Een exploratie van de reactietijdgegevens van eerdere studies doet echter vermoeden dat kinderen soms indirect optellen zonder deze hoofdrekenstrategie te rapporteren. In deze bijdrage bespreken we drie nauw gerelateerde studies waarin we het flexibel gebruik van de indirecte optelstrategie door kinderen zijn nagegaan via (1) het vergelijken van multilevelregressiemodellen waarin reactietijden verschillende patronen van strategiegebruik weergeven, en (2) het vergelijken van de oplossingssnelheid voor verschillende soorten aftrekopgaven gepresenteerd in verschillende formats (*a* – *b* = . vs. *b* + . = *a*). In de discussie besteden we uitgebreid aandacht aan de mogelijkheden en beperkingen van deze reactietijdanalyses voor onderzoek van rekenstrategieën.

1 Inleiding

De voorbije decennia is er heel wat onderzoek gebeurd naar de strategieën waarmee kinderen hoofdrekenopgaven oplossen (Heinze, Marschick, & Lipowsky, 2009; Kraemer, 2009). Deze interesse is mede het gevolg van nieuwe doelen die binnen het rekenonderwijs wereldwijd naar voren zijn geschoven. Zo moeten kinderen niet langer alle rekenopgaven waarmee ze geconfronteerd worden snel en correct kunnen oplossen aan de hand van één aangeleerde standaardprocedure per rekenoperatie (= *routine expertise*), maar ze moeten deze opgaven op een inzichtelijke, gevarieerde en flexibele manier kunnen oplossen (= *adaptieve expertise*) (Baroody & Dowker, 2003; Hatano, 2003; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007; Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2014).

Twee deeldomeinen waarbinnen deze variatie en flexibiliteit in strategiegebruik duidelijk naar voren kunnen komen zijn het hoofdrekenend oplossen van aftrekopgaven van het type $a - b =$. (waarbij we hoofdrekenen, zoals Buys [2001], definiëren als ‘rekenen *met* het hoofd, in tegenstelling tot rekenen *in* het hoofd’) in het getallengebied tot 20 (bijvoorbeeld 14 – 6 = .) en in het getallengebied 20-100 (bijvoorbeeld 75 – 43 = .). Hieraan is de voorbije jaren in onderzoek dan ook veel aandacht besteed, mede door de bevinding dat heel wat kinderen moeilijkheden hebben om zulke opgaven correct op te lossen (Barrouillet, Mignon, & Thevenot, 2008; Fuson, 1992; Peltenburg, van den Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2012; Selter, 2001; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009a). Zowel voor het getalgebied tot 20 als 20-100 is duidelijk geworden dat kinderen verschillende oplossingsstrategieën gebruiken (Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Heinze et al., 2009; Kraemer, 2009; Peltenburg et al., 2012; Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, et al., 2009a, 2009b; Verschaffel, Greer, et al., 2007). In deze bijdrage categoriseren we deze strategieën op basis van de operatie die aan het oplossingsproces ten grondslag ligt, en maken we een onderscheid[1] tussen de *directe aftrekstrategie*, waarbij het kleinste getal afgeteld (bijvoorbeeld 81 – 4 = . via “81,… 80, 79, 78, 77, dus het antwoord is 77”) of afgetrokken wordt van het grootste (bijvoorbeeld 75 – 43 = . via 75 – 40 = 35 en 35 – 3 = 32), en de *indirecte optelstrategie*, waarbij bepaald wordt hoeveel er bij het kleinste getal geteld (bijvoorbeeld 81 – 77 = . via “77, … 78, 79, 80, 81, dus het antwoord is 4”) of toegevoegd moet worden om het grootste te bereiken (bijvoorbeeld 75 – 43 = . via

43 + 7 = 50 en 50 + 25 = 75, dus het antwoord is 7 + 25 = 32). Deze indirecte optelstrategie wordt vooral als zeer efficiënt beschouwd voor opgaven met een relatief grote aftrekker zoals 83 – 79. De tussenstappen die men dan uitvoert zijn immers eenvoudiger en kleiner dan bij een directe aftrekstrategie, en leiden bijgevolg minder snel tot het maken van fouten: vergelijk 83 – 79 = . via 79 + 1 = 80 en 80 + 3 = 83, dus het antwoord is 1 + 3 = 4, met het oplossen van 83 – 79 = . via 83 – 70 = 13 en 13 – 9 = 13 – (3 + 6) = 10 – 6 = 4. Omgekeerd wordt verondersteld dat de indirecte optelstrategie veel minder efficiënt is bij aftrekopgaven met een relatief kleine aftrekker, zoals 83 – 4. In dat geval zijn de tussenstappen moeilijker en groter dan bij een directe aftrekstrategie: vergelijk 83 – 4 = . via 4 + 6 = 10, 10 + 73 = 83, dus het antwoord is 6 + 73 = 79 met het oplossen van 83 – 4 = . via 83 – (3 + 1) = 80 – 1 = 79.

Eerder Leuvens onderzoek bij volwassenen toonde aan dat zij de indirecte opstelstrategie zeer vaak rapporteren en deze strategie zeer efficiënt (d.w.z. snel en accuraat) toepassen bij het beantwoorden van $a - b =$. aftrekopgaven (Torbeyns, De Smedt, Peters, Ghesquière, & Verschaffel, 2011). Studies bij Vlaamse kinderen brachten echter aan het licht dat zij de indirecte optelstrategie zelden rapporteren bij zulke opgaven (De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010; Torbeyns, De Smedt et al., 2009a). Deze strategie wordt ook slechts sporadisch aangeleerd in het Vlaamse onderwijs (Peters, 2013). Vlaamse handboekauteurs en leerkrachten lijken nog steeds de directe aftrekstrategie te verkiezen als standaardmethode voor het hoofdrekenend oplossen van aftrekopgaven doorheen het hele lagereschoolcurriculum (Torbeyns & Verschaffel, 2013). Het principe van flexibel strategiegebruik is nochtans opgenomen in de eindtermen en ontwikkelingsdoelen voor wiskunde binnen het gewoon en buitengewoon onderwijs (Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, 2014), maar het lijkt erop dat er in de eigenlijke klaspraktijk slechts beperkt aandacht aan besteed wordt.

Een exploratie van de reactietijdgegevens in deze studies bij kinderen doet echter vragen rijzen bij de validiteit van hun mondelinge strategierapporteringen (zie ook Kirk & Ashcraft [2001], Peters [2013], en de inleiding tot dit themanummer). In de studie van De Smedt et al. (2010) bijvoorbeeld werd het strategiegebruik onderzocht bij leerlingen uit het derde leerjaar voor drie types van aftrekopgaven met steeds een tientalpassering: opgaven met een relatief kleine (zoals 81 – 7 = .), een middelmatige (zoals 81 – 43 = .), en een relatief grote aftrekker (zoals 81 – 79 = .). Hierbij bleek dat deze leerlingen overwegend directe aftrekstrategieën rapporteerden. Indien ze daadwerkelijk hoofdzakelijk gebruik maakten van deze strategie, dan zou men kunnen verwachten dat de reactietijden bij het oplossen van deze opgaven zouden stijgen met de grootte van de aftrekker, dus van opgaven met een kleine, over opgaven met een middelmatige, tot opgaven met een grote aftrekker, omdat het aftrekken van een groter getal hoe dan ook meer en/of grotere tussenstappen vraagt (Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2010). Dit patroon kwam echter niet naar voren in de reactietijden van de kinderen: opgaven met een relatief grote aftrekker zoals 81 – 79 werden integendeel sneller opgelost dan opgaven met een gemiddelde aftrekker. Dit patroon doet vermoeden dat de kinderen soms – en met name bij opgaven met een relatief grote aftrekker – een indirecte optelstrategie gebruikten, ook al rapporteerden ze dit niet.

Aansluitend bij deze twijfels over de validiteit van verbale strategierapporteringen bij opgaven met relatief grote aftrekkers zijn we een onderzoeksproject gestart waarin we de mogelijkheden en beperkingen van niet-verbale methoden, en meer bepaald reactietijdanalyses, hebben onderzocht om het strategiegebruik van kinderen bij aftrekopgaven te identificeren. In deze bijdrage bespreken we drie studies uit dit project waarin het flexibel gebruik van de indirecte optelstrategie door Vlaamse leerlingen werd nagegaan. In een eerste studie bestudeerden we het flexibel gebruik van de indirecte optelstrategie bij het oplossen van aftrekopgaven met brug over 10 (bijvoorbeeld 12 – 9 = .). In de tweede studie bestudeerden we strategiepatronen bij aftrekopgaven uit het getaldomein 20-100 met brug over het tiental (bijvoorbeeld 83 – 79 = .). In beide studies waren de deelnemers normaalvorderende kinderen uit het gewoon lager onderwijs. De derde studie was een replicatie van de tweede studie bij kinderen met rekenproblemen uit het buitengewoon lager onderwijs.

In alle studies presenteerden we zowel aftrekopgaven in de $a - b = .$ vorm als in de vorm van een puntsom van het type $a + . = b$. We baseerden ons hiervoor op het werk van Campbell (2008), die argumenteert dat wanneer een opteloperatie gebruikt wordt om aftrekopgaven op te lossen, puntsommen (bijvoorbeeld 79 + . = 83) sneller opgelost zullen worden dan dezelfde opgaven in het aftrekformat (83 – 79 = .). Wanneer een aftrekopgave is voorgesteld als puntsom kan de indirecte optelstrategie immers gemakkelijk uitgevoerd worden, terwijl een opgave met $a - b = .$ vorm een mentale herrepresentatie vereist (vice versa voor het uitvoeren van een directe aftrekstrategie; die kan gemakkelijker worden uitgevoerd bij opgaven in de $a - b = .$ vorm in vergelijking met een puntsom).

In iedere studie stonden de oplossingstijden van de kinderen centraal, en testten we eerst multilevelregressiemodellen die drie verschillende strategiepatronen weergeven (gebaseerd op het werk van Groen & Poll [1973] en Woods, Resnick, & Groen [1975]): het consistent gebruik van de directe aftrekstrategie, het consistent gebruik van de indirecte optelstrategie, of het flexibel switchen tussen beide strategieën op basis van de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil. In de twee laatste studies vergeleken we ook de snelheid op opgaven gepresenteerd in de verschillende formats, om na te gaan of er specifieke taakkenmerken ten grondslag liggen aan flexibele strategiekeuzes. In deze bijdrage zullen de mogelijkheden en beperkingen van deze reactietijdanalyses centraal staan; voor een gedetailleerde bespreking van de inhoudelijke resultaten van de studies verwijzen we naar de originele manuscripten (respectievelijk Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel [2012], Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel [2013], en Peters, De Smedt, Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel [2014]).

2 Indirect optellen in het getalgebied tot 20

In een eerste studie (Peters et al., 2012) wilden we het gebruik van de indirecte optelstrategie door kinderen nagaan voor aftrekopgaven met brug over 10. Het gebruik van deze strategie voor opgaven zoals 11 – 8 of 14 – 9 heeft in het verleden amper onderzoeksaandacht gekregen, terwijl dit wel het geval was voor aftrekopgaven met getallen kleiner dan 10. Groen en Poll (1973) en Woods et al. (1975) bijvoorbeeld bestudeerden reactietijden van 7- tot 9-jarigen bij het oplossen van opgaven zoals 3 + . = 9 en 9 – 7 = . door verschillende oplossingspatronen te toetsen, waaronder (1) het consistent terugtellen vanaf het aftrektal in het aantal stappen dat overeenkomt met de waarde van de aftrekker, (2) het consistent verder tellen van de aftrekker tot het aftrektal, of (3) uit deze twee strategieën die strategie kiezen die het kleinste aantal telstappen inhoudt (i.e., het flexibel wisselen tussen de twee telstrategieën op basis van de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil). Zij concludeerden dat het derde model het best het strategiegebruik van de kinderen weergaf: Wanneer de aftrekker kleiner was dan het verschil (zoals in 9 – 3 = . of 3 + . = 9), telden de kinderen het aantal stappen dat overeenkomt met de waarde van de aftrekker terug (9…, 8, 7, 6, dus het antwoord is 6); wanneer de aftrekker groter was dan het verschil (zoals in 9 – 7 = . of 7 + . = 9) telden ze verder van de aftrekker tot het aftrektal (7…, 8; 9; dus het antwoord is 2).

We gebruikten dezelfde onderzoeksmethode als Groen en Poll (1973) en Woods et al. (1975) om het gebruik van de indirecte optelstrategie na te gaan bij aftrekopgaven met brug over 10. We testten daarbij 106 normaalvorderende Vlaamse kinderen uit het derde tot zesde leerjaar gewoon lager onderwijs (gemiddelde leeftijden waren 8 jaar en 11 maanden [*SD* = 3 maanden], 9 jaar en 11 maanden [*SD* = 4 maanden], 10 jaar en 10 maanden [*SD* = 4 maanden], en 11 jaar en 10 maanden [*SD* = 3 maanden]). Deze kinderen moesten elk 64 aftrekopgaven oplossen in een computertaak. De helft van deze opgaven werden gepresenteerd als $a - b = .$ aftrekopgave (bijv. 11 – 3 = .), de andere helft als puntsom (bijv. 9 + . = 11). In beide presentatieformats werden alle 32 mogelijke opgaven met brug over 10 weergegeven, met uitzondering van de dubbelsommen (bijv. 12 – 6 = 6). Bij iedere opgave werd dezelfde cyclus doorlopen. Eerst verscheen gedurende 1 seconde een sterretje in het midden van het computerscherm zodat de kinderen exact wisten waar de volgende opgave zou verschijnen. Deze opgave bleef vervolgens zichtbaar op het scherm totdat het kind een antwoord gaf. De tijd werd gemeten vanaf het moment dat de opgave op het scherm verscheen totdat de proefleider via de spatiebalk van een extern toetsenbord aangaf wanneer het kind zijn/haar antwoord gaf en de opgave verdween. De proefleider werd vooraf intensief getraind om deze reactietijdmeting adequaat te kunnen uitvoeren. Daarna gaf de proefleider via het toetsenbord het antwoord van het kind in, en vervolgens werd de volgende opgavenlus opgestart. Er werd geen feedback gegeven over de juistheid van het antwoord. In de instructies werd benadrukt dat men zo snel en zo juist mogelijk moest antwoorden.

Om het strategiegebruik na te gaan vergeleken we per leerjaar de fit van drie multilevelregressiemodellen waarbij opgaven (niveau 1) genest waren in leerlingen (niveau 2), afzonderlijk voor de beide bovenvermelde presentatieformats. Als afhankelijke variabele werd telkens de oplossingstijd per opgave gebruikt, waarvoor enkel de correct beantwoorde opgaven werden meegenomen (4.30% van de trials werd verwijderd). Deze modellen geven het gebruik van drie patronen weer: het consistent gebruik van de directe aftrekstrategie, het consistent gebruik van de indirecte optelstrategie, of het flexibel switchen tussen beide strategieën op basis van de grootte van de aftrekker (A) ten opzichte van het verschil (V) (A < V vs. A > V). De reactietijden werden voorspeld op basis van, respectievelijk, de waarde van de aftrekker, de waarde van het verschil, en het minimum van aftrekker en verschil. In de analyses werd dus telkens één van deze variabelen opgenomen als het enige fixed effect, terwijl het intercept steeds random werd gelaten. Wanneer kinderen altijd de directe aftrekstrategie gebruiken (zoals geclaimd wordt in het Directe Aftrek- of DA-Model), dan zouden de reactietijden het best voorspeld moeten worden door de waarde van de aftrekker (A), omdat aangenomen kan worden dat het langer duurt om een groter getal weg te nemen van het aftrektal (bijv. 9 wegnemen van 11) dan een kleiner getal (bijv. 3 wegnemen van 11). Anderzijds, wanneer kinderen steeds de indirecte optelstrategie gebruiken (het Indirecte Optel- of IO-Model), dan zouden hun reactietijden het best voorspeld moeten worden op basis van de waarde van het verschil (V). Er kan immers van uitgegaan worden dat het minder tijd vraagt om te bepalen hoeveel er bij een getal moet bijgeteld worden wanneer het verschil tussen twee getallen klein is ("Hoeveel moet er bij 9 toegevoegd worden om tot 11 te raken?") dan wanneer dat verschil groot is ("Hoeveel moet er bij 3 toegevoegd worden om tot 11 te raken?"). Wanneer kinderen bij iedere opgave die strategie kiezen die de kleinste stappen inhoudt en dus wisselen op basis van de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (het Switch-Model), dan zouden de reactietijden logischerwijze het best voorspeld moeten worden op basis van het minimum van aftrekker en verschil (min[*A*, *V*]): Voor opgaven waarbij de aftrekker kleiner is dan het verschil (bijv. 11 – 2 = . en 11 – 5 = .), zouden de reactietijden moeten stijgen met de waarde van de aftrekker, aangezien deze opgaven gemakkelijker opgelost kunnen worden met de directe aftrekstrategie. Anderzijds, wanneer het verschil kleiner is dan de aftrekker (bijv. 11 – 6 = . en 11 – 9 = .) dan valt te verwachten dat de reactietijden zullen stijgen met de waarde van het verschil, aangezien deze opgaven gemakkelijker opgelost kunnen worden met behulp van een indirecte optelstrategie.

De resultaten van deze analyses zijn te vinden in Tabel 1.

Uit de vergelijking van de modellen per leerjaar kwam naar voren dat voor de $a - b = .$ aftrekopgaven (bijv. 11 – 3 =) het DA-model steeds de beste fit (kleinste *AIC*) gaf, terwijl voor de opgaven gepresenteerd als puntsom (bijv. 3 + . = 11) het IO-model steeds het best de reactietijden weergaf. Hieruit konden we

Tabel 1

Modelspecificaties voor de multilevelmodellen (met opgave = niveau 1 en leerling = niveau 2) voor de opgaven in het getalgebied tot 20 gepresenteerd als aftrekopgave van het type a − b = . (bovenaan) of als puntsom (onderaan) (Peters et al., 2012)

Presentatieformat	Leerjaar Model	Fixed effect	*AIC*	Parameterschatting fixed effect (in ms) met * *p* < .05 en ** *p* < .01
Aftrekopgave van het type *a* − *b* = .	3e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	**14337.2**	315.47 **
	IO-Model	waarde van V	14355.9	-255.80 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	14384.0	137.79 *
	4e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	**16116.4**	275.39 **
	IO-Model	waarde van V	16127.4	-250.88 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	16175.6	65.73 *
	5e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	**14094.3**	175.43 **
	IO-Model	waarde van V	14101.5	-154.49 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	14121.5	64.76
	6e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	**13633.0**	93.37 **
	IO-Model	waarde van V	13636.3	-85.82 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	13646.4	66.07 *
Puntsommen	3e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	13545.0	-180.27 **
	IO-Model	waarde van V	**13500.9**	341.25 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	13555.2	144.28 *
	4e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	15519.7	-121.45 **
	IO-Model	waarde van V	**15503.8**	170.69 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	15536.8	25.34
	5e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	14097.4	-78.16 *
	IO-Model	waarde van V	**14066.7**	230.35 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	14091.6	158.90 **
	6e leerjaar			
	DA-Model	waarde van A	13408.9	-88.11 **
	IO-Model	waarde van V	**13375.6**	138.23 **
	Switch-Model	minimum (A, V)	13419.9	80.92 **

Noot. We gebruikten het Akaike Information Criterion (AIC) om niet-geneste multilevelregressiemodellen met elkaar te vergelijken. Deze fit-statistiek gebruikt het ‘kleiner is beter’ criterium, dat aangeeft dat het model met de kleinste AIC wordt verkozen boven de andere modellen.

besluiten dat kinderen uit het derde tot en met zesde leerjaar hun strategiekeuze voor het oplossen van aftrekopgaven met brug over 10 in de eerste plaats afstemmen op het presentatieformat: direct aftrekken bij $a - b =$. aftrekopgaven en indirect optellen bij puntsommen. Dit resultaat is dus in contrast met de eerdere resultaten van Groen en Poll (1973) en Woods et al. (1975) voor het getalgebied tot 10, waar de (weliswaar jongere) kinderen bij *beide presentatieformats* op een flexibele manier wisselden tussen de directe aftrek- en indirecte optelstrategie. Dit resultaat staat echter ook in schril contrast met bevindingen uit studies waarin verbale strategierapporteringen gebruikt werden om strategiegebruik te bestuderen bij $a - b =$. opgaven in het getalgebied tot 100 (bijv. De Smedt et al., 2010; Torbeyns, De Smedt et al., 2009a), en waaruit naar voor kwam dat de indirecte optelstrategie niet tot het strategierepertoire behoort van de meeste Vlaamse leerlingen. Uit onze studie blijkt nu dat dit wel het geval is, maar dat ze vooral de voorkeur geven aan deze strategie bij het oplossen van puntsommen, niet bij $a - b =$. aftrekopgaven.

3 Indirect optellen in het getalgebied 20-100

In de tweede studie (Peters et al., 2013) gebruikten we reactietijdanalyses om het flexibel gebruik van de indirecte optelstrategie te bestuderen bij kinderen die aftrekopgaven met tientalpassering in het getalgebied

20-100 oplossen. We testten daarvoor 72 normaalvorderende Vlaamse kinderen uit het vierde tot zesde leerjaar gewoon lager onderwijs (gemiddelde leeftijden waren 9 jaar en 9 maanden [*SD* = 3 maanden], 10 jaar en 10 maanden [*SD* = 4 maanden], en 11 jaar en 9 maanden [*SD* = 3 maanden]). Deze kinderen moesten elk 64 aftrekopgaven oplossen in een computertaak. De helft van deze opgaven werden gepresenteerd als $a - b = .$ aftrekopgave (bijv. 83 – 4 = .), de andere helft als puntsom (bijv. 4 + . = 83). De opgaven werden aangeboden op twee opeenvolgende dagen. Iedere dag kregen de leerlingen een set met 32 opgaven: 16 opgaven gepresenteerd als $a - b = .$ aftrekopgave en 16 opgaven gepresenteerd als puntsom. Opgaven die enkel van elkaar verschilden in presentatieformat (bijv. 83 – 4 = . en 4 + . = 83) werden over de twee sessies verdeeld. Exact dezelfde afnameprocedure werd gevolgd als in de eerste studie.

Net als in de eerste studie werd nagegaan of kinderen de indirecte optelstrategie op een flexibele manier gebruiken. We presenteren in dit overzichtsartikel nieuwe resultaten, op basis van dezelfde methode als in de eerste studie[2]. We vergeleken dus de fit (*AIC*) van de drie eerder voorgestelde multilevelmodellen, zowel voor de $a - b = .$ aftrekopgaven als voor de opgaven gepresenteerd als puntsom, waarbij de oplossingstijden van de correct beantwoorde opgaven gebruikt werden als afhankelijke variabele (ditmaal werd 9.03%

Tabel 2

Modelspecificaties voor de multilevelmodellen (met opgave = niveau 1 en leerling = niveau 2) voor de aftrekopgaven van het type a − b = . en als puntsom in het getalgebied 20-100, normaalvorderende kinderen bovenaan (op basis van de gegevens in Peters et al., 2013) en kinderen met rekenproblemen onderaan (op basis van de gegevens in Peters et al., 2014)

Deelnemers	Presentatieformat	Leerjaar Model	Fixed effect	*AIC*	Parameterschatting fixed effect (in ms) met * *p* < .05 en ** *p* < .01
Normaal-vorderende kinderen	Aftrekopgave van het type *a* − *b* = .	4e leerjaar			
		DA-Model	waarde van A	12474.6	14.50 *
		IO-Model	waarde van V	12478.5	-0.82
		Switch-Model	minimum (A, V)	**12325.6**	138.97 **
		5e leerjaar			
		DA-Model	waarde van A	13602.3	27.46 **
		IO-Model	waarde van V	13615.5	-6.47
		Switch-Model	minimum (A, V)	**13490.8**	125.99 **
		6e leerjaar			
		DA-Model	waarde van A	12810.5	11.85 *
		IO-Model	waarde van V	12816.3	3.39
		Switch-Model	minimum (A, V)	**12590.8**	105.46 **
	Puntsommen	4e leerjaar			
		DA-Model	waarde van A	12755.3	-6.10
		IO-Model	waarde van V	12739.4	33.82 **
		Switch-Model	minimum (A, V)	**12575.8**	172.50 **
		5e leerjaar			
		DA-Model	waarde van A	13545.1	-9.94
		IO-Model	waarde van V	13528.1	27.10 **
		Switch-Model	minimum (A, V)	**13393.4**	116.93 **
		6e leerjaar			
		DA-Model	waarde van A	12731.3	-7.27
		IO-Model	waarde van V	12695.0	32.57 **
		Switch-Model	minimum (A, V)	**12543.6**	111.10 **
Kinderen met Reken-problemen	Aftrekopgave van het type *a* − *b* = .	DA-Model	waarde van A	27811.7	58.23 **
		IO-Model	waarde van V	27862.8	-33.01 **
		Switch-Model	minimum (A, V)	**27764.3**	116.24 **
	Puntsommen	DA-Model	waarde van A	28229.6	-31.60 **
		IO-Model	waarde van V	28189.4	58.27 **
		Switch-Model	minimum (A, V)	**28045.5**	167.58 **

Noot. We gebruikten het Akaike Information Criterion (AIC) om niet-geneste multilevelregressiemodellen met elkaar te vergelijken. Deze fit-statistiek gebruikt het 'kleiner is beter' criterium, dat aangeeft dat het model met de kleinste AIC wordt verkozen boven de andere modellen.

van de trials niet mee opgenomen): het DA-model, het IO-model en het Switch-Model. De resultaten van deze multilevelmodellen met opgaven (niveau 1) genest in leerlingen (niveau 2) zijn te vinden bovenaan in Tabel 2.

Uit de vergelijking van de *AIC* per leerjaar kwam naar voren dat in alle leerjaren en bij beide presentatieformats gewisseld werd tussen direct aftrekken en indirect optellen op basis van de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (A < V vs. A > V): de leerlingen gebruikten direct aftrekken wanneer A < V en indirect optellen wanneer A > V.

Als tweede stap werd de hypothese getoetst dat de strategiekeuze tussen direct aftrekken en indirect optellen niet enkel gebaseerd zou zijn op de grootte van de aftrekker (A < V vs. A > V), maar ook op basis van de numerieke afstand tussen aftrekker en verschil (groot vs. klein) (naar de combinatie van de grootte van de aftrekker en de numerieke afstand wordt verder ook verwezen als de *relatieve grootte* van de aftrekker). Zoals eerder vermeld, wordt de indirecte optelstrategie vooral als zeer efficiënt beschouwd wanneer men een opgave oplost met een relatief grote aftrekker, zoals 81 – 79. Het voordeel van deze strategie ten opzichte van de directe aftrekstrategie is echter minder duidelijk bij opgaven waarbij aftrekker en verschil kort bij elkaar liggen, zoals 81 – 44. We verwachtten daarom dat de indirecte optelstrategie de dominante strategie zou zijn wanneer de aftrekker extreem groot is ten opzichte van het verschil (bijv. 83 – 79 = .) en de directe aftrekstrategie voornamelijk zou gebruikt worden wanneer de aftrekker extreem kleiner is dan het verschil (bijv. 83 – 4 = .). Wanneer aftrekker en verschil kort bij elkaar liggen (zoals 81 – 37 = . of 81 – 44 = .) zou de strategiekeuze niet bepaald worden door de grootte van de aftrekker en zouden beide strategieën gebruikt worden. De opgaven in deze studie werden daarom geselecteerd op basis van twee criteria: de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (A < V vs. A > V) en de numerieke afstand tussen de aftrekker en het verschil (groot vs. klein). Klein-verschil opgaven werden gedefinieerd als opgaven waarbij de afstand tussen aftrekker en verschil niet groter was dan 10 (bijv. 81 – 37 = . of 81 – 44 = .). Voor de groot-verschil opgaven moest de afstand tussen aftrekker en verschil groter zijn dan 10 én moest de aftrekker of het verschil een ééncijferig getal zijn (bijv. 83 – 4 = . of 83 – 79 = .).

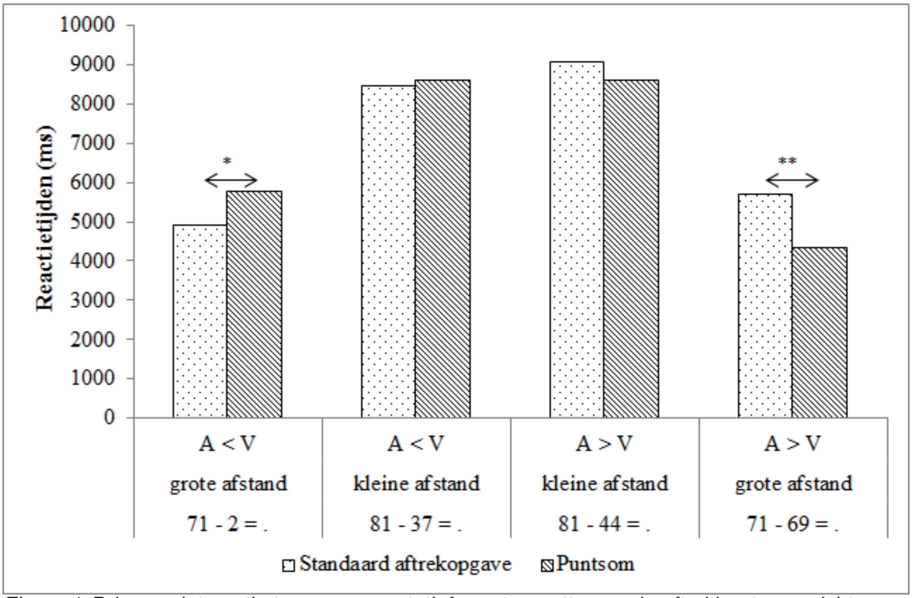
Om de hypothese over de bijkomende invloed van de numerieke afstand tussen aftrekker en verschil te kunnen toetsen, maakten we gebruik van een bijkomende reactietijdanalyse: het vergelijken van de snelheid tussen de twee presentatieformats voor de vier types van opgaven. Indien kinderen op systematische wijze zouden wisselen tussen direct aftrekken en indirect optellen op basis van de relatieve grootte van de aftrekker, dan zou er een driewegsinteractie moeten gevonden worden tussen de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (A < V vs. A > V), het presentatieformat ($a - b =$. vs. puntsom), en de numerieke afstand tussen aftrekker en verschil (groot vs. klein). Meer specifiek zouden A > V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 83 – 79 = .) sneller moeten opgelost worden als puntsom dan als $a - b =$. aftrekopgave (omdat laatstgenoemde aftrekopgaven eerst mentaal omgebouwd worden om de indirecte optelstrategie te kunnen uitvoeren, en dat vraagt tijd), terwijl A < V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 83 – 4 = .) sneller opgelost zouden moeten worden als $a - b =$. aftrekopgave (omdat de opgaven gepresenteerd als puntsom eerst mentaal omgebouwd worden om de directe aftrekstrategie te kunnen uitvoeren, en dat vraagt tijd). Voor de opgaven met een kleine afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 81 – 37 = . of 81 – 44 = .) zou deze grootte × format interactie veel kleiner of zelfs helemaal afwezig moeten zijn omdat bij een dergelijk kleine afstand tussen aftrekker en verschil geen duidelijke snelheidswinst te verwachten is voor één van beide strategieën en daarom beide strategieën zullen gebruikt worden. We gebruiken voor deze analyses ANOVAs met herhaalde metingen.

Figuur 1 toont de gemiddelde reactietijden over opgaven en kinderen bij de vier verschillende opgaventypes voor de beide presentatieformats.

Zoals af te leiden valt uit deze figuur werd de verwachte driewegsinteractie gevonden: enkel voor de opgaven met een grote numerieke afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 83 – 4 of 83 – 79) was er een significant verschil in gemiddelde reactietijden tussen de twee presentatieformats: de A > V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (bijv. 83 – 79) werden sneller opgelost als puntsom dan als $a - b = .$ aftrekopgave, terwijl bij de A < V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (bijv. 83 – 4) het omgekeerde het geval was. Deze grootte × format interactie was niet aanwezig voor de opgaven met een kleine afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 81 – 37 of 81 – 44). Dit patroon in reactietijden werd enkel gevonden over de drie leerjaren heen; er werd dus geen interactie gevonden met leerjaar. In alle leeftijdsgroepen werd dus flexibel gekozen tussen direct aftrekken en indirect optellen op basis van de relatieve grootte van de aftrekker (i.e., de combinatie van de grootte van de aftrekker en de numerieke afstand).

4 Indirect optellen in het getalgebied 20-100 bij kinderen met rekenproblemen

In een derde studie repliceerden we de tweede studie bij 44 Vlaamse leerlingen met rekenproblemen uit het laatste jaar van het buitengewoon lager onderwijs Type 8[3] (gemiddelde leeftijd 12 jaar en 5 maanden [SD = 6 maanden]) (zie Peters et al., 2014). Met de resultaten van deze studie hoopten we te kunnen bijdragen aan de discussie of het op een inzichtelijke, gevarieerde en flexibele manier kunnen oplossen van rekenopgaven ook een haalbaar en zinvol doel is voor kinderen met rekenproblemen (Kilpatrick et al., 2001). Sommigen stellen immers dat het voor deze kinderen beter is om hen één standaardprocedure per rekenoperatie aan te leren, terwijl anderen net stellen dat het ook voor kinderen met rekenproblemen belangrijk is dat ze op een flexibele en inzichtelijke manier gebruik kunnen maken van verschillende strategieën. De 44 kinderen met rekenproblemen losten volgens dezelfde procedure dezelfde 64 opgaven op als in Peters et al. (2013), en in dit overzichtsartikel worden identieke analyses



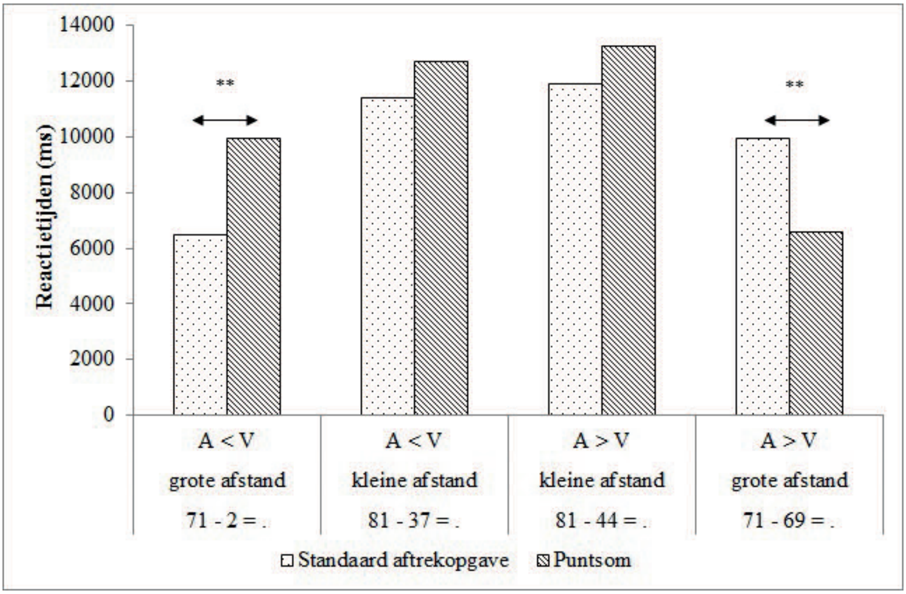
Figuur 1. Driewegsinteractie tussen presentatieformat, grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil, en numerieke afstand tussen aftrekker en verschil, normaalvorderende kinderen (Peters et al., 2013). * $p < .05$. ** $p < .01$

als hierboven gerapporteerd[4], ditmaal echter met zowel correcte als foutief beantwoorde opgaven (zie discussie). Als eerste stap in de analyses vergeleken we de fit van het DA-model, het IO-model en het Switch-Model, opnieuw voor zowel de $a - b =$. opgaven als voor de opgaven gepresenteerd als puntsom. De resultaten zijn te vinden onderaan in Tabel 2.

Uit de vergelijking van de *AIC* kon geconcludeerd worden dat ook kinderen met rekenproblemen bij beide presentatieformats wisselden tussen direct aftrekken en indirect optellen op basis van de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (A < V vs. A > V): ook zij gebruikten direct aftrekken wanneer A < V en indirect optellen wanneer A > V.

Vervolgens gingen we, net als bij normaalvorderende kinderen, na of de strategiekeuze tussen direct aftrekken en indirect optellen gebaseerd was op zowel de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (A < V vs. A > V) als de numerieke afstand tussen aftrekker en verschil (groot vs. klein). Daarom gingen we opnieuw aan de hand van ANOVAs met herhaalde metingen na of er een driewegsinteractie kon gevonden worden tussen de grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil (A < V vs. A > V), het presentatieformat ($a - b =$. vs. puntsom), en de numerieke afstand tussen aftrekker en verschil (groot vs. klein). Figuur 2 toont de gemiddelde reactietijden bij de vier verschillende opgaventypes voor de beide presentatieformats.

Uit Figuur 2 kunnen we afleiden dat er, net zoals bij de normaalvorderende kinderen, enkel een significant verschil in gemiddelde reactietijden was voor de opgaven met een grote numerieke afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 83 – 4 of 83 – 79): de A > V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (bijv. 83 – 79) werden sneller opgelost als puntsom dan als $a - b =$. aftrekopgave, terwijl bij de A < V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (bijv. 83 – 4) het omgekeerde het geval was. Voor de opgaven met een kleine afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 81 – 37 of 81 – 44) vonden we deze grootte × format interactie niet. Dit betekent dus dat ook kinderen met rekenproblemen flexibel kiezen tussen direct aftrekken en indirect optellen op



Figuur 2. Driewegsinteractie tussen presentatieformat, grootte van de aftrekker ten opzichte van het verschil, en numerieke afstand tussen aftrekker en verschil, kinderen met rekenproblemen (Peters et al., 2014). ** $p < .01$

basis van de relatieve grootte van de aftrekker (i.e., de combinatie van de grootte van de aftrekker en de numerieke afstand). Deze Vlaamse resultaten liggen in dezelfde lijn als bij Nederlands onderzoek: Peltenburg et al. (2012) vonden ook dat kinderen uit het speciaal basisonderwijs spontaan gebruik maken van de indirecte optelstrategie, dit bij symbolische opgaven met relatief klein verschil en tientalpassering (vergelijkbaar met onze A > V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil) en vooral bij vraagstukken met een aanvulcontext.

5 Discussie

In deze bijdrage hebben we aan de hand van drie empirische studies twee soorten reactietijdanalyses voorgesteld om het (flexibel) gebruik van de indirecte optelstrategie te bestuderen: modellen waarin ofwel het effect van verschillende getalskenmerken in de taak werd vergeleken, ofwel verschillende opgaventypes in twee presentatieformats werden vergeleken. Aanleiding tot deze reeks studies was het vermoeden dat verbale strategierapporteringen niet altijd valide zijn, inz. voor opgaven met een relatief grote aftrekker (zie Inleiding, verwijzing naar De Smedt et al. [2010]). Uit de voorgestelde studies blijkt dat het analyseren van reactietijden de mogelijkheid biedt om zicht te krijgen op strategieën van kinderen (maar ook van volwassenen) die zij niet of moeilijk onder woorden kunnen brengen. In tegenstelling tot studies waarin verbale rapporteringen gebruikt werden ter identificatie van strategiegebruik bleek uit onze studies dat de indirecte optelstrategie wel degelijk gehanteerd wordt door kinderen, zelfs door kinderen met rekenproblemen, en dat er binnen het getalgebied 20-100 bovendien flexibel gekozen wordt tussen deze indirecte optelstrategie en de directe aftrekstrategie, namelijk op basis van de relatieve grootte van de aftrekker (i.e., de combinatie van de grootte van de aftrekker en de numerieke afstand).

Aangezien kinderen en volwassenen ook bij andere rekentaken (bijvoorbeeld schattend rekenen) en in andere domeinen (bijvoorbeeld spellen) gebruik kunnen maken van moeilijk te verwoorden strategieën, is het toetsen van de toepasbaarheid van deze methoden bij andere taken en in andere domeinen een belangrijke en interessante piste voor verder onderzoek. Daarenboven bieden deze non-verbale methoden ook bouwstenen aan voor het optimaliseren van de onderwijspraktijk. Ze kunnen bijvoorbeeld geïntegreerd worden in adaptieve computergestuurde oefen- en/of testomgevingen waarin oefeningen aangeboden worden rekening houdend met de strategiecompetenties van leerlingen zonder dat omslachtige en tijdrovende verbale strategierapportering vereist zijn. De resultaten tonen echter ook aan dat kinderen spontaan meer strategieën gebruiken dan aangeleerd tijdens de rekenlessen, maar deze niet rapporteren. Dit suggereert dat er meer aandacht moet besteed worden aan het flexibel leren gebruiken van strategieën en het leren verwoorden ervan (zie ook Peters, 2013), door bijvoorbeeld klasgesprekken op te zetten over het 'hoe, wanneer, en waarom' van het gebruik van bepaalde strategieën. Tijdens zulke klasgesprekken maken kinderen kennis met nieuwe strategieën die hun klasgenoten rapporteren en die ze vervolgens zelf kunnen uitproberen. Bovendien kunnen leerkrachten kinderen tijdens deze klasgesprekken uitdagen om te reflecteren over de bijzondere geschiktheid van bepaalde strategieën zoals de indirecte optelstrategie voor specifieke opgaventypes. Zulke klasgesprekken kunnen tot slot ook leiden tot meer positieve emoties, attitudes, en beliefs ten opzichte van flexibel strategiegebruik in het algemeen.

In studie 3 werden zowel correct als foutief beantwoorde opgaven meegenomen in de analyses, terwijl in studies 1 en 2 enkel de correct beantwoorde opgaven werden geanalyseerd. Deze laatste manier van werken is het meest gebruikelijk bij taken met een hoge accuraatheid (zie vb. Campbell, 2008). Bij kinderen met rekenproblemen kan deze werkwijze moeilijk aangehouden worden, omdat zij nu eenmaal veel meer fouten maken. Indien we in studie 3 enkel de correct beantwoorde opgaven hadden meegenomen in onze analyses, dan hadden we voor 17 van de 44 leerlingen (39%) enkel A < V opgaven met grote afstand tussen aftrekker en verschil (zoals 83 – 4) kunnen gebruiken. Aangezien er op basis van enkel dit type opgaven geen representatief strategiepatroon gemodelleerd kan worden, hadden we deze 17 leerlingen moeten verwijderen uit onze analyses. Het verwijderen van deze 17 kinderen zou echter tot een aanzienlijke vertekening van onze resultaten geleid hebben. Daarom beslisten we om de analyses uit te voeren met zowel correct als foutief beantwoorde opgaven van alle 44 leerlingen. Aangezien deze resultaten volledig in lijn liggen van de analyses voor de 27 leerlingen die wel voor elk van de vier opgaventypes een voldoende groot aantal opgaven correct had beantwoord, lijkt deze manier van werken verantwoord.

Er zijn echter ook enkele tekorten verbonden aan de voorgestelde reactietijdanalyses (zie ook Peters, 2013). Een eerste beperking hangt samen met de definitie die we hanteerden voor flexibel strategiegebruik. We vertrokken van het idee dat het wisselen tussen strategieën bepaald wordt door bepaalde getalskenmerken in de opgave. In het Switch-Model voorspelden we daarom dat de directe aftrekstrategie zou gebruikt worden wanneer de aftrekker kleiner is dan het verschil, terwijl de indirecte optelstrategie zou gebruikt worden wanneer de aftrekker groter is dan het verschil. Het wisselpunt tussen deze twee strategieën werd dus a priori en voor alle deelnemers vastgelegd op de helft van het aftrektal uit de opgave. De locatie van het wisselpunt hoeft echter niet noodzakelijk voor alle deelnemers op de helft van het aftrektal te liggen. Sommige deelnemers kunnen bijvoorbeeld enkel wisselen naar de indirecte optelstrategie wanneer het verschil heel erg klein is, terwijl anderen misschien enkel de directe aftrekstrategie gebruiken wanneer de aftrekker uiterst klein is (Torbeyns et al., 2011). Het is evenmin uitgesloten dat de locatie van dit wisselpunt verandert met de leeftijd. Het is dus een uitdaging om in verder onderzoek de exacte locatie van het wisselpunt en mogelijke individuele verschillen daarin te bepalen. Daarvoor kan inspiratie gevonden worden in het werk van Verschaffel, De Corte, Lamote, en Dhert (1998), die een *numerosity judgement* taak gebruikten waarin men moet bepalen hoeveel gekleurde blokjes er te zien zijn in een rooster van 10 bij 10. De deelnemers moesten alle hoeveelheden tussen 1 en 100 bepalen terwijl hun reactietijden nauwkeurig werden gemeten. Nadien werd een tweefasig lineair regressiemodel (Beem, 1995) gebruikt om op basis van deze reactietijden de hoeveelheid te bepalen waarbij een individu wisselde van de ene strategie (in dit geval: een optelstrategie, waarbij men alle gekleurde blokjes telt) naar een andere strategie (in dit geval: een aftrekstrategie, waarbij men alle niet-gekleurde blokjes telt en dat aantal aftrekt van het totale aantal blokjes in het rooster), resulterend in een individueel wisselpunt voor iedere deelnemer.

Een tweede beperking betreft het gebruik van *lineaire* regressiemodellen om strategiegebruik na te gaan. In onze studies maakten we onderscheid tussen directe aftrek- en indirecte optelstrategieën en focusten we op de invloed van de absolute waarden van de getallen in een opgave (aftrekker, verschil, of het minimum van beide) op de strategiekeuzen van de leerlingen. Bij onze regressieanalyses veronderstelden we dat de reactietijden positief en lineair zouden samenhangen met de waarde van deze getallen. Deze veronderstelling bouwt voort op de eerder besproken *counting models* van Groen en Poll (1973) en Woods et al. (1975), waarbij ervan uitgegaan wordt dat alle opgaven (één per één) tellend opgelost worden. Rekening houdend met de leeftijd en onderwijservaringen van de leerlingen uit onze studies, is de kans echter groot dat zij de originele opgaven via een splits-, rijg- of variaprocedure ombouwden tot een combinatie van gemakkelijkere deelopgaven waarbij meerdere tussenstappen uitgevoerd worden en waarbij dus ook nieuwe getallen betrokken zijn (bijv. 75 – 43 = . via 70 – 40 en 5 – 3, dus het antwoord is 30 + 2 = 32, of via 43 + 7= 50, 50 + 25 = 75, dus het antwoord is 7 + 25 = 32) (bijvoorbeeld Peltenburg et al., 2012; Selter, Prediger, Nührenbörger, & Hussmann, 2012). Maar, ook in dat geval blijft het zo dat de tussenstappen moeilijker en groter zijn voor opgaven met een relatief grote aftrekker in vergelijking met opgaven met een relatief kleine aftrekker bij gebruik van een directe aftrekstrategie (vergelijk bijvoorbeeld 81 – 7 = . via 81 – 1 – 6 = 80 – 6 = 74 met het oplossen van 81 – 79 = . via 81 – 70 – 9 = 11 – 9 = 11 – 1 – 8 = 10 – 8 = 2), en moeilijker en groter voor opgaven met een relatief kleine aftrekker in vergelijking met opgaven met een relatief grote aftrekker in het geval van indirect optellen (vergelijk bijvoorbeeld 81 – 79 = . via 79 + 1 = 80, 80 + 1 = 81, dus het antwoord is 1 + 1 = 2 met het oplossen van 81 – 7 = . via 7 + 3 = 10, 10 + 71 = 8, dus het antwoord is 3 + 71 = 74).

Hoewel we in deze bijdrage wegens plaatsgebrek enkel ingegaan zijn op analyses op groepsniveau, kunnen de regressieanalyses ook op individueel niveau worden toegepast en kunnen deelnemers dus geïdentificeerd worden als gebruikers van de directe aftrekstrategie of de indirecte optelstrategie, of als flexibele switchers. Zo vonden we dat vier van de 72 normaalvorderende kinderen die aftrekopgaven uit het getalgebied 20-100 oplosten (Peters et al., 2013), geïdentificeerd konden worden als gebruiker van de directe aftrekstrategie en 57 kinderen als flexibele switcher. Bij de 44 kinderen met rekenproblemen (Peters et al., 2014) vonden we 10 kinderen die geïdentificeerd konden worden als gebruiker van de directe aftrekstrategie en 20 als flexibele switcher. Natuurlijk betekent zulke identificatie niet dat iemand die aan één van deze profielen beantwoordt volkomen standvastig is in zijn/haar strategiekeuzen, maar wel dat dit voor (minstens) de meerderheid van de opgaven het geval was. In deze bijdrage werd evenmin ingegaan op de belangrijke vraag hoe deze individuele verschillen in strategiepatronen verklaard kunnen worden. Een empirisch onderbouwd antwoord daarop is nog niet te geven, maar op basis van de literatuur over het gebruik van rekenstrategieën lijken algemene kenmerken zoals executieve functies (namelijk werkgeheugen, inhibitie en shifting) en algemene rekenvaardigheid, maar ook specifiekere kenmerken zoals *number sense* (gemeten via het vergelijken van getallen of het plaatsen van getallen op een getallenlijn) en inzicht in bepaalde onderliggende wiskundige principes (zoals het inversie- of complementariteitsprincipe tussen de optelling en aftrekking) alvast interessante pistes om in verder onderzoek op te focussen (zie ook Peters [2013]; Vanbinst, Ghesquière, & De Smedt [2012] en Baroody, Torbeyns, & Verschaffel [2009]).

Dit brengt ons bij een laatste kwestie, namelijk de wenselijkheid – zowel vanuit het perspectief van onderzoek als van onderwijs – om strategieën te kunnen identificeren op itemniveau. Beide voorgestelde reactietijdanalyses laten niet toe conclusies te trekken over hoe een leerling een specifieke opgave heeft opgelost. Er kunnen dus enkel uitspraken gedaan worden over *patronen* in strategiegebruik. Het gecombineerde gebruik van meerdere onderzoeksmethoden maakt zulke strategie-identificatie op het niveau van een individuele opgave wel mogelijk, bijvoorbeeld het identificeren van strategieën via zowel reactietijden als verbale strategierapporteringen (en/of gegevens die verkregen worden via andere non-verbale onderzoeksmethoden zoals oogbewegingen; zie verder in dit themanummer). Dergelijke triangulatie van methoden is evenwel niet zonder problemen. In een pilootstudie voorafgaand aan het hier voorgestelde onderzoeksproject werden volwassenen geconfronteerd met aftrekopgaven in twee verschillende condities: één conditie waarin enkel reactietijden gemeten werden, en een tweede waarin er ook verbaal gerapporteerd werd na elke opgave. Een vergelijking van de reactietijden uit de twee condities bracht aan het licht dat de deelnemers significant trager antwoordden in de laatste conditie, hetgeen suggereert dat de deelnemers anders tewerk gingen in de twee condities. Mogelijks pasten sommige deelnemers een strategie niet toe omdat zij die achteraf moeilijk zouden kunnen verwoorden (Kirk & Ashcraft, 2001). Ook kan de opdracht tot verbale rapportage in de tweede conditie tot meer bewuste strategiekeuzen hebben geleid. Het is dus een grote uitdaging voor toekomstig onderzoek naar strategieën die leerlingen gebruiken bij rekentaken – en bij uitbreiding ook op andere domeinen – om diverse strategie-identificatiemethoden, waaronder de hier gepresenteerde reactietijdanalyses, in te zetten.

Noten

[1] Naast de directe aftrek- en de indirecte optelstrategie kan ook een indirecte aftrekstrategie onderscheiden worden, waarbij bepaald wordt hoeveel er van het grootste getal afgeteld (bijv. 81 – 77 = . via "81,… 80, 79, 78, 77, dus het antwoord is 4") of afgetrokken moet worden om het kleinste te bereiken (bijvoorbeeld 75 – 43 = . via 75 – 30 = 45 en 45 – 2 = 43, dus het antwoord is 30 + 2= 32) (De Corte & Verschaffel, 1987). Deze indirecte aftrekstrategie kan ook als zeer efficiënt beschouwd worden voor aftrekopgaven met een relatief grote aftrekker (zoals 81 – 79 = .). Eerdere studies maakten echter duidelijk dat deze strategie zelden tot nooit gebruikt wordt in Nederland en Vlaanderen (Beishuizen, Van Putten, & Van Mulken, 1997; Torbeyns, De Smedt et al., 2009b; Van Lieshout, 1997).

[2] Deze multilevelanalyses zijn andere analyses dan gerapporteerd in de originele publicatie (Peters et al., 2013), waar geen rekening gehouden werd met de individuele verschillen tussen kinderen.

[3] Het Vlaamse buitengewoon lager onderwijs Type 8 is een type van speciaal onderwijs dat specifiek is afgestemd op de noden van kinderen met ernstige leerproblemen. Om toegang te krijgen tot het buitengewoon onderwijs Type 8 moeten kinderen een ernstige achterstand in lezen, spellen of rekenen vertonen (score < percentiel 10 op een gestandaardiseerde test) die niet door andere factoren (zoals een lage intelligentie of gebrekkige instructie) verklaard kunnen worden. In de studie van Peters et al. (2014) hadden de deelnemers enkel rekenproblemen, geen lees- of spellingproblemen.

[4] Deze multilevelanalyses zijn andere analyses dan gerapporteerd in de originele publicatie (Peters et al., 2014), waar geen rekening gehouden werd met de individuele verschillen tussen kinderen.

Literatuur

Baroody, A. J., & Dowker, A. (Eds.) (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11,* 2-9. doi: 10.1080/10986060802583873

Barrouillet, P., Mignon, M., & Thevenot, C. (2008). Strategies in subtraction problem solving in children. *Journal of Experimental Child Psychology, 99,* 233-251. doi: 10.1016/j.jecp.2007.12.001

Beem, A. L. (1995). A program for fitting two-phase segmented-curve models with an unknown change point, with an application to the analysis of strategy shifts in a cognitive task. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers, 27,* 392-399.

Beishuizen, M., Van Putten, C. M., & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction, 7,* 87-106. doi: 10.1016/S0959-4752(96)00012-6

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10,* 221-247. doi: 10.1016/S0959-4752(99)00028-6

Buys, K. (2001). Hoofdrekenen. In M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys, & A. Treffers (Eds.), *Kinderen leren rekenen* (pp. 37–64). Groningen: Wolters-Noordhoff.

Campbell, J. I. D. (2008). Subtraction by addition. *Memory & Cognition, 36,* 1094-1102. doi: 10.3758/MC.36.6.1094

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* 363-381.

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20,* 205-215. doi: 10.1016/j.learninstruc.2009.02.020

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws

(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York, NY: MacMillan.

Groen, G. J., & Poll, M. (1973). Subtraction and the solution of open sentence problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 16,* 292-302.

Hatano, G. (2003). Foreword. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. xi-xiii). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education, 41,* 591-604. doi: 10.1007/s11858-009-0205-5

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kirk, E. P., & Ashcraft, M. H. (2001). Telling stories: The perils and promise of using verbal reports to study math strategies. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 27,* 157-175.

Kraemer, J.–M. (2009). *Balans over de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool. Uitkomsten van de peiling in 2005* (PPON-reeks nummer 40). Arnhem: Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling.

Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2012). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100. A Proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 351-369. doi: 10.1007/s10649-011-9351-0

Peters, G. (2013, September). *Using non-verbal methods to study the flexible use of the subtraction by addition strategy.* Unpublished doctoral dissertation, KU Leuven, Leuven.

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Adults' use of subtraction by addition. *Acta Psychologica, 135,* 323-329. doi: 10.1016/j.actpsy.2010.08.007

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2012). Children's use of subtraction by addition on large single-digit subtractions. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 335-349. doi: 10.1007/s10649-011-9308-3

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2013). Children's use of addition to solve two-digit subtraction problems. *British Journal of Psychology, 104 (4), 495-511*. doi: 10.1111/bjop.12003

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2014). Subtraction by addition in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Instruction, 30,* 1-8. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.11.001

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 145-173.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hussmann, S. (2012). Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 389-408. doi: 10.1007/s10649-011-9305-6

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009a). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 1-17. doi: 10.1007/s10649-008-9155-z

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009b). Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: Influence of task, subject, and instructional factors. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 1-30.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Peters, G., Ghesquière, P., & Verschaffel L. (2011). Use of indirect addition in adults' mental subtraction in the number domain up to 1,000. *British Journal of Psychology, 102,* 585-597. doi: 10.1111/j.2044-8295.2011.02019.x

Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: a choice/no-choice study. *Research in Mathematics Education, 15,* 129-140. doi:10.1080/14794802.2013.797745

Vanbinst, K., Ghesquière, P., & De Smedt, B. (2012). Numerical magnitude representations and individual differences in children's arithmetic strategy use. *Mind, Brain, and Education, 6,* 129-136. doi: 10.1111/j.1751-228X.2012.01148.x

Van Lieshout, E. C. D. M. (1997). What can research on word and context problems tell about effective strategies to solve subtraction problems? In M. Beishuizen, K. P. E. Gravemeijer, & E. C. D. M. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 79-111). Utrecht: CDß Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lamote, C., & Dhert, N. (1998). The acquisition and use of an adaptive strategy for estimating numerosity. *European Journal of Psychology of Education, 13,* 347-370.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). New York, NY: MacMillan.

Vlaams Ministerie van Onderwijs en Vorming, Agentschap voor Kwaliteitszorg in Onderwijs en Vorming, Afdeling Projecten: EVC – Curriculum – Kwalificaties (2014). *Curriculum: Eindtermen, ontwikkelingsdoelen, basiscompetenties en doelen beroepsgerichte vorming.* Gevonden op: http://www.ond.vlaanderen.be/curriculum/

Woods, S. S., Resnick, L. B., & Groen, G. J. (1975). An experimental test of five process models for subtraction. *Journal of Educational Psychology, 67,* 17-21. doi: 10.1037/h0078666

Auteurs

Greet Peters, **Joke Torbeyns** en **Lieven Verschaffel** zijn verbonden aan het Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie van de KU Leuven, **Bert De Smedt** en **Pol Ghesquière** aan de Onderzoekseenheid Gezins- en Orthopedagogiek van de KU Leuven.

Correspondentieadres:
greet.peters@ppw.kuleuven.be

Abstract

The flexible use of the subtraction by addition strategy studied by means of reaction time analyses.

In this contribution we discuss the use of reaction time analyses to identify strategy use patterns in mentally solving elementary subtraction, with a special focus on the subtraction by addition strategy. Previous research has shown that adults frequently report this strategy, whereas children hardly do so. Reaction time data of earlier studies suggest, however, that children sometimes use subtraction by addition without reporting this strategy. In this contribution, we discuss three closely related studies in which the flexible use of the subtraction by addition strategy was investigated by means of (1) comparing linear regression models in which reaction times represented different strategy use patterns, and (2) comparing speed on different types of problems presented in different formats ($a - b = .$ vs. $b + . = a$). In the discussion we will pay attention to the possibilities and limitations of these reaction time analyses for research on strategy use.