Wiskundig begrip bij het modelleren van veranderingsprocessen met differentiaalvergelijkingen

N. C. Verhoef, J. A. Zwarteveen-Roosenbrand, W. R. van Joolingen en J. M. Pieters

Samenvatting

Deze studie gaat in op wiskundig begrip bij het modelleren van veranderingsprocessen in 6 vwo. Het doel is zicht te krijgen op de aanpak die de leerlingen kiezen en de methoden die zij gebruiken om verschijnselen om te zetten in formules die een proces weergeven. Concreet is de vraag of de leerlingen het opstellen van een differentiaalvergelijking begrijpen. In dit onderzoek participeerden 14 vwo-6-leerlingen (wiskunde D) van drie verschillende scholen. Via een open vragenlijst en een wiskundeopdracht die hardop denkend moest worden uitgevoerd, zijn gegevens verzameld. De resultaten van het onderzoek laten zien dat de leerlingen moeite hadden met het ordenen van verschijnselen. De leerlingen lieten zich leiden door het gebruik van aangeleerde procedures en bekend voorkomende uitdrukkingen. Zij doorliepen opvallend lang de verkennende fase en vertoonden een sterke neiging een formule te zoeken voor een direct verband. Zij beseften niet of te weinig dat de afgeleide, als maat voor verandering, noodzakelijk is om een differentiaalvergelijking op te kunnen stellen. Het verdient aanbeveling om in de beginfase van het modelleren van veranderingsprocessen expliciet aandacht te besteden aan de betekenis van de afgeleide met het oog op wiskundige begripsvorming.

1 Inleiding

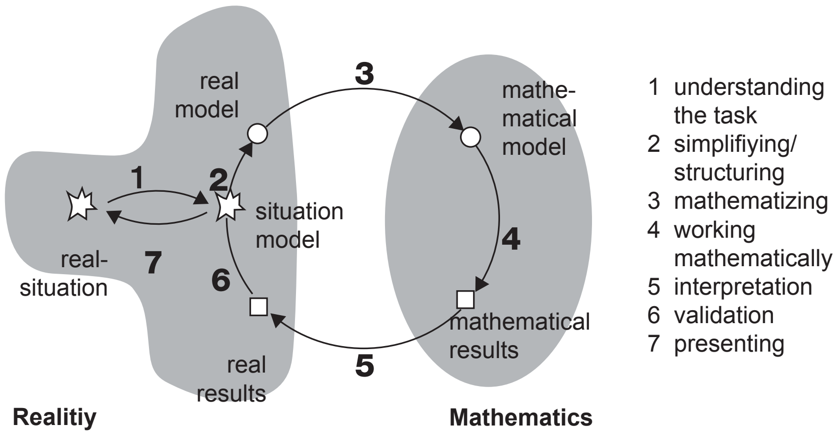
Om (natuurkundige) verschijnselen te kunnen onderzoeken worden de verschijnselen “vertaald” in een wiskundig model. Een wiskundig model is een benadering van de werkelijkheid waarin verbanden worden gelegd tussen de voor het verschijnsel relevante grootheden, zoals afstand en tijd (Kerngroep - Universiteit Twente, 2007). Een bruikbaar model voor die verschijnselen waar het gaat om de beschrijving van een veranderingsproces, is een differentiaalvergelijking. Kennismaken met modellen en het leren modelleren is belangrijk op elk niveau, in ieder leerjaar van het onderwijs, omdat de essentie een weergave is van het geleid heruitvinden van wiskunde (Freudenthal, 1991).

In deze bijdrage gaat het om wiskundige begripsvorming bij het modelleren van veranderingsprocessen in 6 vwo. Na een situatieschets over modelleren in het voortgezet onderwijs volgt een concretisering van het onderwerp differentiaalvergelijkingen in het vak wiskunde D. De inleiding eindigt met een theoretische beschouwing over het modelleren van veranderingsprocessen in relatie tot wiskundige begripsontwikkeling.

1.1 Modelleren in het onderwijs

Modelleren betekent zoeken naar een model om de werkelijkheid weer te geven. Spandaw en Zwaneveld (2012) introduceren in het Handboek Wiskundedidactiek een modelleercyclus om de werkelijkheid aan de hand van een model te kunnen beschrijven. De modelleercyclus van Blum en Leiβ (2005) is in het onderwijs goed bruikbaar, omdat er onderscheid wordt gemaakt tussen een ‘situationeel model’ en een ‘model van de werkelijkheid’. Figuur 1 geeft de modelleercyclus van Blum en Leiβ (2005, p. 1626) schematisch weer. De figuur laat zien dat het modelleerproces start met een analyse van de werkelijkheid, zodat de situatie kan worden gedefinieerd (1). De werkelijkheid wordt omgevormd tot een situationeel model. Vervolgens wordt dit situationele model vereenvoudigd en gestructureerd (2). Belangrijke aandachtspunten zijn alle aspecten die verband houden met de situatie. Daarna kan het situationele model worden vertaald naar een model in wiskundige termen (3). Relevante grootheden worden geïdentificeerd en benoemd, en wiskundige verbanden worden opgesteld. Het model wordt wiskundig bewerkt (4) en de resultaten worden in wiskundige termen vertaald naar de realiteit (5). Ten slotte worden de resul-

PEDAGOGISCHE STUDIËN
2013 (90) 33-46



Figuur 1. Modelleercyclus van Blum en Leiβ (2005, p. 1626).

taten gespiegeld aan het situationele model (6). Vaak wordt deze cyclus meerdere malen doorlopen, bijvoorbeeld om meerdere factoren bij de situatie te betrekken.

In deze studie concentreren wij ons – binnen de context van veranderingsprocessen – op de eerste drie stappen uit de modelleercyclus van Blum en Leiβ (2005): het *begrijpen* van de context, het *vereenvoudigen* van de situatie waarbij *relevante grootheden* worden gekozen, en het *mathematiseren*. Deze vier activiteiten zijn verwant met het door Treffers (1978) beschreven 'horizontaal en verticaal mathematiseren' in het wiskundeonderwijs. Horizontaal mathematiseren staat voor het zodanig transformeren van de realiteit dat deze met beschikbare wiskundige middelen kan worden beschreven. Verticaal mathematiseren verwijst naar de generalisatie, de niveauverhoging, de verkorting, de verdergaande formalisering van de actuele rekenkundige handelingen, en het ontdekken van structuren en patronen.

Om werkelijkheid en model te overbruggen wordt, ter ondersteuning van een modelleercyclus, vaak gebruikgemaakt van ICT-hulpmiddelen. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen ligt voor de hand, omdat daarmee het modelleren wordt gestructureerd en modellen worden geschematiseerd (Heck, 2012). Het voordeel van het gebruik van ICT-hulpmiddelen is volgens Doorman (2007) dat docenten in staat zijn hun leerlingen te begeleiden in het kader van het geleid heruitvinden. Een nadeel is dat bij het gebruik van ICT-hulpmiddelen minder aandacht wordt besteed aan inzicht in de onderliggende wiskundige mechanismes die modellen berekenbaar en analyseerbaar maken (Rasmussen, 2001; Rasmussen & Blumenfeld, 2007). De kans bestaat dat het mentale experimenteren verwaarloosd wordt omdat de mogelijke transformaties en representaties vooraf gegeven zijn (Bakker, 2007). Ervaringen in het voortgezet onderwijs laten zien dat het gebruik van ICT-hulpmiddelen die gebaseerd zijn op de System Dynamics methode bij het modelleren van veranderingsprocessen geen wiskundig perspectief biedt (Steed, 1992; Van Joolingen, De Jong, Lazonder, Savelsbergh, & Manlove, 2005). Differentiaalvergelijkingen zijn slechts impliciet aanwezig in het model (Löhner, Van Joolingen, Savelsbergh, & Van Hout-Wolters, 2005). Een *wiskundige* analyse is daardoor niet mogelijk. In dit artikel betogen we dat voor het modelleren van veranderingsprocessen wiskundig begrip van belang is.

1.2 Modelleren met differentiaalvergelijkingen binnen wiskunde D

Modelleren is een essentieel onderdeel van het in 2007 ingevoerde vak wiskunde D. De vernieuwingscommissie cTWO, die het modelleren expliciet als denkactiviteit ziet, omschrijft het modelleren als "een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald" (cTWO, 2007, p. 25). Modellen van dynamische systemen zijn belangrijk voor het begrijpen van wiskunde en natuurwetenschappen (o.a. Nersessian, 1995). Binnen het domein

Dynamische systemen wordt verondersteld dat de leerlingen in differentiaalvergelijkingen van de vorm $y' = f(y, t)$ eigenschappen van f kunnen relateren aan eigenschappen van oplossingen, zoals het al dan niet stationair zijn, monotonie en asymptotisch gedrag en in eenvoudige gevallen een oplossing expliciet kunnen bepalen. Differentiaalvergelijkingen beschrijven veranderingsprocessen niet *rechtstreeks,* maar indirect. Oplossingen van differentiaalvergelijkingen geven wél een rechtstreekse beschrijving van het veranderingsproces. Omdat differentiaalvergelijkingen niet altijd algebraïsch kunnen worden opgelost, kan alleen een analyse van de differentiaalvergelijking inzicht geven in de *eigenschappen* van de oplossing zodat stationaire toestanden en uiteindelijke grenswaarden (asymptoten) alsnog kunnen worden bepaald. Voor de vernieuwingscommissie cTWO is het proces van het opstellen of afleiden van modellen van veranderingsprocessen geen speerpunt. In de omschrijving van het domein Dynamische systemen staat: "…er is onderscheid tussen het *analyseren* van het model en het *afleiden* van het model. De nadruk in dit domein ligt op het eerste." (cTWO, 2008, p. 2). Toch verdient het aanbeveling om bij het onderwerp differentiaalvergelijkingen reeds in het voortgezet onderwijs te beginnen met het modelleren van veranderingsprocessen (o.a. Verhulst, 2008).

Het opstellen van differentiaalvergelijkingen als model voor veranderingsprocessen komt in de meest gebruikte wiskundemethodes summier aan de orde. Zo worden bijvoorbeeld veranderingsprocessen in stapjes voorgeprogrammeerd, waarna een differentiaalvergelijking wordt afgeleid uit een differentievergelijking (die de gemiddelde verandering op een interval beschrijft) met stapgrootte 1. Volgens Rasmussen en King (2000) kan deze aanpak leiden tot misconcepties, omdat de overgang naar de continue verandering (de verandering op elk moment) op deze manier voor de leerlingen niet duidelijk wordt. Chaachoua en Saglan (2006) voegen daaraan toe dat leerlingen grote moeite hebben met het analyseren van het gedrag van de oplossing van een differentiaalvergelijking als zij niet weten hoe die differentiaalvergelijking tot stand gekomen is.

1.3 Het modelleren van veranderingsprocessen en wiskundige begripsontwikkeling

Bij het modelleren van veranderingsprocessen speelt het type van het wiskundig begrijpen een rol. Sfard (1991) onderscheidt operationeel begrip (gericht op het beheersen van procedures) van structureel begrip (gericht op het begrijpen van objecten). Door bewerkingen uit te voeren met een object (een procedure) ontstaat volgens Sfard structureel begrip via interiorisatie, condensatie en reïficatie. Het operationele begrip ligt ten grondslag aan het structurele begrip. Bijvoorbeeld, door herhaald twee getallen op elkaar te delen, waarbij niet altijd de deler kleiner dan het deeltal of de 'uitkomst' een geheel getal behoeft te zijn, ontstaat langzamerhand (eerst onbewust en later bewust) het inzicht dat de uitkomsten van deze bewerking een zelfstandig object vormen. Dit object, een rationaal getal (een breuk), kan ingepast worden in het reeds bekende object getal. Op dit moment kan dit nieuw gevormde object onder woorden worden gebracht en worden gedefinieerd. De definitie van het object is een uiting van structureel begrip, als gevolg van operationeel begrip. Freudenthal (1984) spreekt in zijn didactische fenomenologie van structureel begrip als de handelingen die daaraan voorafgaan, niet vergeten kunnen worden maar van blijvende betekenis zijn.

In deze studie naar het modelleren van veranderingsprocessen aan de hand van differentiaalvergelijkingen neemt het begrip afgeleide een prominente plaats in. De verschillende aspecten van het begrip afgeleide worden in de onderzoeksliteratuur breed uitgemeten (Habre & Abboud, 2006; Kidron, 2008; Roorda, 2012; Tall, 2008; Thurston, 1994; Verhoef & Tall, 2011; Zandieh, 1997; Zandieh & Knapp, 2006). Tall (2008) benadrukt de proces- en de concept-kant van wiskundige begrippen, met name de afgeleide, en drukt die uit in de term 'procept'. Hij typeert de afgeleide enerzijds als een bewerking, namelijk het nemen van de limiet van het differentiequotiënt, van een deling (een *pro*ces). Anderzijds is de afgeleide een maat voor verandering - hoe y verandert als x verandert -, een object (een con*cept*). Dat betekent dat de afgeleide een bewerking is én het resultaat van die bewerking met een nieuwe 'hogere' betekenis (een *procept*).

In de context van het begrijpen van (het opstellen van) een eerste-orde differentiaalvergelijking[1] als beschrijving van een veranderingsproces onderscheiden wij, naar analogie van Sfard (1991), operationeel begrip van structureel begrip. Wij beschouwen het operationele begrip van (het opstellen van) een eerste-orde differentiaalvergelijking als het kunnen opstellen van en het herkennen van de vorm van een vergelijking waarin een differentiequotiënt (of een differentiaalquotiënt, de afgeleide) voorkomt. Het besef dat de differentiequotiënten (of de differentiaalquotiënten, afgeleiden) een verandering weergeven duidt op structureel begrip van een differentiaalvergelijking. In deze studie behandelen wij het begrijpen van de afgeleide in termen van Tall (2008). Het operationele begrip van de afgeleide beschouwen wij als het beheersen van het (limiet)proces van een deling, en het structurele begrip van de afgeleide als het begrijpen van de afgeleide als maat voor verandering (proces én concept), het procept.

Het doel van deze studie is na te gaan in welke mate leerlingen het opstellen van modellen van veranderingsprocessen met differentiaalvergelijkingen operationeel dan wel structureel begrijpen.

2 Methode

2.1 Deelnemers

In dit onderzoek participeerden 14 vwo-6-leerlingen. Hun gegevens staan in Tabel 1.

Van de scholen A en C participeerden de volledige wiskunde-D-groepen. Uit de wiskunde-D-groep van school B zijn vier van de negen leerlingen gekozen op grond van spreiding in de behaalde repetitiecijfers over het onderwerp Dynamische systemen.

2.2 Onderzoeksopzet

Enkele dagen nadat op de scholen het onderwerp differentiaalvergelijkingen was afgesloten beantwoordden de leerlingen individueel schriftelijk vragen over hun voorstelling van het concept differentiaalvergelijking (Figuur 2). Dit duurde ongeveer een kwartier. De vragen legden de uitgangspositie van de leerlingen vast. Aan de hand van de opgaven A, B en

Tabel 1
Kenmerken deelnemers

School	Schoolsoort	Aantal participerende leerlingen	Gebruikt schoolboek	Aandacht voor opstellen van differentiaalvergelijkingen	Afsluitende toets ten tijde van het onderzoek gemaakt?
A	Havo-vwo bovenbouw Noord Nederland	4	Modellen en Dynamische Systemen versie 2.0 F.Verhulst	Nadrukkelijke aandacht in gebruikt schoolboek; enkele extra opgaven met discrete benadering[3]	Nee
B	havo-vwo bovenbouw Zuid Nederland	4	Wageningse Methode	Extra boekje met door docent opgesteld materiaal, bestaande uit ruim 20 opgaven met voorbeelden, continue benadering[3]	Ja
C	Scholengemeenschap Midden Nederland	6	Moderne Wiskunde	Enkele opgaven in gebruikt schoolboek, zonder nadrukkelijke aandacht	Ja

A. Wat is een differentiaalvergelijking? Dat wil zeggen: geef een zo uitgebreid mogelijke omschrijving van wat jij allemaal weet over het begrip differentiaalvergelijking.
B. Geef een voorbeeld van een differentiaalvergelijking, en waarom gaf je dat voorbeeld?
C. Geef een voorbeeld van een situatie die met een differentiaalvergelijking beschreven kan worden
D. Welke van de volgende uitdrukkingen zijn differentiaalvergelijkingen (y is een functie *van* x):
   a. $y' = 3$
   b. $y'' + y' + 3 = 0$
   c. $y' = 3y$
   d. $y' = 3x$

Figuur 2. Vragen voor de leerlingen over het concept differentiaalvergelijking.

Opgave 1
In een vat van 500 liter zit 100 liter water, waarin 400 gram zout is opgelost. Er stroomt een zoutoplossing met een concentratie van 2 gram per liter het vat in, met een snelheid van 3 liter per minuut. De hoeveelheid wordt intussen goed gemengd en stroomt er weer uit met een snelheid van 2 liter per minuut.
a. Na hoeveel minuten is het vat vol?
b. Stel een differentiaalvergelijking op die de inhoud van het vat beschrijft totdat het vol is als functie van de tijd t in minuten.
c. Schets een grafiek die volgens jou weergeeft wat de hoeveelheid zout is als functie van de tijd.
d. Stel bij deze gegevens een differentiaalvergelijking dZ/dt op voor de hoeveelheid zout Z, als $0 \leq t \leq 400$.

Figuur 3. Opgave bij de hardop-denk-sessies.

C is in kaart gebracht of de leerlingen begrepen dat en hoe differentiaalvergelijkingen veranderingsprocessen beschrijven. Opgave D is gebruikt om te beschrijven in hoeverre de definitie en de voorbeelden uit de schoolmethode richting gaven aan het modelleerproces.

Op dezelfde dag (school A en B) of de dag erna (school C) hebben de leerlingen hardop denkend een opgave gemaakt (Figuur 3). De hardop-denk-sessies vonden, per school, op één dag plaats. De leerlingen hadden tussendoor geen contact met elkaar over de inhoud van deze sessies. De onderzoeker nam de hardop-denk-sessies af, waarbij zij indien nodig, richtinggevende vragen stelde of aanwijzingen gaf. De hardop-denk-sessies duurden elk een lesuur van 50 minuten. De leerlingen die eerder klaar waren, konden nog een of meer andere differentiaalvergelijkingen opstellen. De hiermee gegenereerde data zijn in dit artikel buiten beschouwing gelaten.

De opgave bestond uit het opstellen van twee verschillende differentiaalvergelijkingen binnen eenzelfde context. Het eerste deel ging over het vullen van een vat met een zoutoplossing. Het veranderingsproces (opgave b) betrof de verandering van de hoeveelheid *vloeistof* in het vat. Opgave d, waarin een differentiaalvergelijking moet worden opgesteld bij de verandering van de hoeveelheid *zout* in het vat, was (op de eenheden na) gelijk aan een opgave die Rasmussen en Marrongelle (2006) gebruikten in hun onderzoek naar mogelijkheden om (in het wiskundeonderwijs) aan te sluiten bij modelleeractiviteiten van studenten. Sommige studenten uit het onderzoek van Rasmussen en Marrongelle bleken bij deze opgave een rechtstreekse beschrijving (zonder de verandering daarin te betrekken) te verwarren met de beschrijving van de verandering. In deze studie is voor deze opgave gekozen om op dit punt de modelleeractiviteiten van de deelnemers aan dit onderzoek te kunnen vergelijken met die van de deelnemers aan het experiment van Rasmussen en Marrongelle.

2.3 Dataverzameling en -verwerking

De hardop-denk-sessies zijn op video opgeno-

A. Het verkennen van de ***s***ituatie (As) en het ***i***dentificeren van de relevante grootheden (Ai).
B. Het kiezen van ***v***ariabelen (Bv) en het toekennen van ***e***enheden (Be).
C. Het ***i***dentificeren van de onafhankelijke variabele (Ci) en het onder woorden brengen hoe de afhankelijke grootheid verandert, resp. grootheden veranderen (Cw), indien in de vorm van een ***d***ifferentievergelijking (Cd).
D. Het uitdrukken van deze verandering in een differentiaalvergelijking afgeleid van een ***d***ifferentievergelijking (Dd) of meteen met de ***a***fgeleide (Da), en het noemen van de ***r****andvoorwaarde* (Dr).

Figuur 4. De modelleerfasen A-D, onderscheiden in deelfasen.

men. De gemaakte opgaven zijn ingenomen. De video-opnames van de hardop-denk-sessies zijn getranscribeerd en gereduceerd door off-task uitingen weg te laten. De gereduceerde transcripties zijn opgesplitst in opeenvolgende acties. Een actie is gedefinieerd als een samenhangende eenheid, waarin zowel woorden en handelingen van de leerling als van de interviewer (onderzoeker) kunnen zijn opgenomen. Alle acties die vragen van de interviewer bevatten naar het concept differentiaalvergelijking met de antwoorden daarop en de acties die inzicht gaven in de perceptie van de leerling over het concept differentiaalvergelijking, zijn gemarkeerd.

De antwoorden op de vragen A-D (Figuur 2) zijn bijeengevoegd in een document waarin is aangegeven welke leerling welke antwoorden gaf. De getekende grafieken zijn gerubriceerd naar de vorm.

De gegevens van één leerling van school A waren voor de classificatie niet bruikbaar, omdat de onderzoeker de stof opnieuw moest uitleggen. Hierdoor was de invloed van de onderzoeker op de acties van deze leerling te groot. De gegevens van deze leerling zijn buiten beschouwing gelaten.

2.4 Data-analyse

Het instrument waarmee de data van de hardop-denk-sessies zijn geanalyseerd is in een vooronderzoek ontwikkeld, beproefd en aangepast (Zwarteveen et al., 2011, 2012). Het is een classificatieschema dat berust op de vier gekozen modelleeractiviteiten het *begrijpen* van de context, het *vereenvoudigen* van de situatie, het kiezen van de *relevante grootheden* en het *mathematiseren*, in de context van het modelleren. De modelleeractiviteiten die voor het opstellen van een differentiaalvergelijking vereist zijn, zijn aangepast tot een bruikbare vorm (zie Figuur 4).

De aangepaste modelleeractiviteiten begrijpen, vereenvoudigen en het kiezen van relevante grootheden zijn te herkennen in A. Het mathematiseren komt terug in B. In C gaat het om horizontaal mathematiseren en in D de vervolgstap, verticaal mathematiseren (Treffers, 1978).

In het classificatieschema staan in de kolommen de deelfasen As, Ai, …, Dr, voorafgegaan door een kolom voor het rangnummer en de actie, gevolgd door een kolom waarin eventueel opmerkingen geplaatst kunnen worden (Figuur 5). De letters n en d staan voor **n**oemen en **d**oen. In de rijen worden de acties geplaatst voorzien van een rangnummer.

De uitingen en activiteiten van de leerlingen zijn per actie aan de hand van deze kolommen geclassificeerd. Eerst is (zijn) de activiteit(en) bepaald en is genoteerd van welke deelfase sprake is, of de leerling de activiteit **n**oemt of **d**oet, of er sprake is van inzicht en of de activiteit correct, foutief of onvolledig is uitgevoerd. In een tweede ronde zijn de interventies van de interviewer in de analyse betrokken. De interventies zijn ingedeeld in de categorieën "verklaar", "hint" en "anders". De reacties van de leerlingen op de interventies zijn op dezelfde manier als de interventies ingedeeld. Het opstellen van een

actie	As		Ai		Bv		Be		Ci		Cw		Cd		Da		Dd		Dr		opmerkingen
	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	

Figuur 5. De titels van de kolommen van het classificatie-instrument. Voor de betekenis van de afkortingen, zie Figuur 4.

differentiaalvergelijking door de verandering daarin te betrekken is gecodeerd als het structureel begrijpen van een differentiaalvergelijking. Een rechtstreekse formule opstellen zonder de verandering daarin te betrekken (geen differentiaalvergelijking) en deze daarna differentiëren is gecodeerd als het operationeel begrijpen van een differentiaalvergelijking (het kennen van de wiskundige *vorm*). De classificatie is door een tweede codeur, een ervaren wiskundedocent, aan de hand van de gebruikte classificatiecriteria herhaald. Dit resulteerde in een overeenkomst van ruim 96%. Bij verschillen is de classificatie op basis van consensus opnieuw vastgelegd.

3 Resultaten

Een samenvatting van de resultaten die uit de classificaties volgen is weergegeven in Tabel 2. De namen van de leerlingen zijn gefingeerd. De namen van de leerlingen van school A beginnen met een N, die van de leerlingen van school B met een L en die van de leerlingen van school C met een M.

In de tweede kolom van Tabel 2 is aangegeven welke grafiek de leerlingen vermoedden:

- G een (bijna) correcte grafiek (dalend tot een minimum vervolgens stijgend),
- \+ een stijgende grafiek met een horizontale asymptoot,
- \- een dalende grafiek met een horizontale asymptoot,
- S een grafiek die schommelt om een horizontale asymptoot,
- L een lineair stijgende grafiek.

In de daaropvolgende acht kolommen is per leerling per deelfase aangegeven hoeveel symbolen er in de betreffende fase zijn geplaatst, en hoeveel van de activiteiten in deze fase met een open symbool zijn weerge-

Tabel 2

Overzicht van de aantallen leerlingactiviteiten verdeeld over de vier modelleerfasen A-D en hun deelfasen As-Dr (zie Figuur 4 voor een uitleg van deze fasen)

Leerling	Vorm	Aantal acties per fase (a) waarvan aantal zonder inzicht (o)																			
		As		Ai		Bv		Be		Ci		Cw		Cd		Da		Dd		Dr	
		a	o	a	o	a	o	a	o	a	o	a	o	a	o	a	o	a	o	a	o
Nathan	G	6	0	2	0	1	0	4	1	1	0	3	0	8	5	-		5	3	1	0
Niek	+	9	4	4	0	8	1	4	3	3	0	4	2	8	6	4	4	5	3	-	
Nils	+	10	4	2	0	2	0	4	3	2	0	2	2	5	4	-		6	5	-	
Leander	S	6	4	4	0	4	0	6	3	2	0	6	1	-		9	6	-		-	
Lex	+	11	7	4	1	4	1	8	2	3	0	7	4	-		8	7	-		1	0
Lisa	G	11	6	5	1	7	5	7	2	2	0	4	2	-		4	2	-		3	1
Luuk	G	15	4	4	0	4	1	3	0	4	0	1	0	-		5	3	-		3	0
Maarten	-	4	3	2	1	4	2	9	7	1	0	12	11	-		4	4	-		4	4
Marcel	G	5	0	3	0	4	0	2	0	2	0	13	10	-		6	5	1	0	4	1
Marianne	+	9	6	2	0	6	2	1	0	3	0	7	7	12	11	3	2	5	5	1	1
Mark	-	8	2	2	0	2	0	5	2	3	0	5	3	-		6	3	-		2	0
Melvin	L	5	1	3	0	6	1	6	1	4	0	6	2	1	1	10	8	-		3	0
Menno	-	8	6	1	0	4	1	2	0	1	0	3	1	3	3	4	2	1	0	2	0

Noot: L=Leerling, V=Vorm

geven omdat ze niet volledig en met inzicht werden verricht. In Tabel 3 is per leerling aangegeven hoeveel activiteiten volgen op een hint. De aantallen reacties op hints zijn apart voor de opgaven a en b, en voor de opgaven c en d (Figuur 3) gegeven.

De bespreking van de resultaten volgt het schema per kolom van links naar rechts. Daarna worden ook bevindingen bij het opstellen van de differentiaalvergelijking bij vraag b (Figuur 3) en enkele resultaten uit de vragenlijst vermeld.

Vorm grafiek

Acht van de 13 leerlingen vermoeden een asymptotisch gedrag van de grafiek van de hoeveelheid zout (opgave c). De asymptotisch verlopende grafieken lijken (met uitzondering van één) op de grafieken die een oplossing weergeven van een versimpeld model van een opwarmings- of afkoelingsproces. In de schoolmethodes van de deelnemende leerlingen, is aan dit soort modellen ruim aandacht geschonken. Hierin zien wij de neiging van leerlingen om eerder verworven kennis in operationele zin direct over te nemen.

In de *kolom As* (het verkennen van de situatie) zijn bij elke leerling minstens vier symbolen geplaatst. Splitsen we die uit naar de twee modelleeropdrachten, dan blijkt dat voor de opgaven c en d (Figuur 3) bij één leerling maar twee symbolen in de kolom As zijn geplaatst. Bij deze leerling overheerst het operationeel manipuleren met formules, de context speelt geen rol. Voor de overige leerlingen is voor de opgaven c en d bij gemiddeld 26,1% van de geclassificeerde acties een symbool in de kolom As geplaatst, de percentages lopen van 11,8 tot 71,9. De verdeling van de symbolen over opgave c en opgave d kan verschillen. Een aantal leerlingen probeert in opgave d een model te vinden bij het door hen foutief vermoede verloop van de grafiek in opgave c. Omdat het zoeken van een (differentiaal) vergelijking bij een grafiek niet de situatiebeschrijving is, zijn deze leerlingen genoodzaakt de situatie alsnog te gaan verkennen. Andere leerlingen zijn bij het schetsen van de vermoede grafiek in opgave c lang bezig grip te krijgen op de situatie, onder andere doordat de situatie niet goed verkend is: bij deze opgave zijn in de kolom As bij opgave c veel activiteiten te zien zonder inzicht. Bij het opstellen van het model in opgave d is het noodzakelijk om de situatie sneller en beter te verkennen (structureel begrip), en komt (met extra vragen en wat aanwijzingen) een correcte differentiaalvergelijking tot stand.

Het hoge percentage acties zonder inzicht in de *kolommen Cw* en *Da*, respectievelijk *Cd* en *Dd* [2] duidt op de moeilijkheid om de verandering onder woorden te brengen en uit te drukken in een formule. Analyse van de bijbehorende acties laat zien dat meerdere leerlingen niet begrijpen hoe een proces van verandering kan worden weergegeven in een formule. De rechtstreekse formule (zonder dat daarin de verandering wordt betrokken) voor de inhoud $100 + 1 \cdot t$ (liter) beschrijft de toename van de inhoud per minuut en niet de snelheid waarmee het vat per minuut volstroomt (de verandering). Illustratief is de volgende argumentatie van een leerling: “In één minuut komt er zes gram bij, dus in drie minuten drie maal zes gram, dus het verandert met $6t$.” De leerling begrijpt de situatie niet, modelleervaardigheid A.

Andere acties die zonder inzicht zijn uitgevoerd, zie de kolommen *Cd* of *Da*, geven blijk van de misvatting dat elke differentiaalvergelijking een model voor exponentiële groei is. Onderstaand citaat is hiervan een voorbeeld.

Tabel 3
Aantal symbolen na hints bij opgave a en b (ab) en bij opgave c en d (cd)

Leerling	Aantal symbolen	
	ab	cd
Nathan	5	7
Niek	0	13
Nils	2	8
Leander	2	3
Lex	5	13
Lisa	2	9
Luuk	1	11
Maarten	12	11
Marcel	7	11
Marianne	17	12
Mark	2	5
Melvin	1	3
Menno	2	5

Interviewer: Wat wil je proberen?
Nils: Deze formule $\frac{Z(t+\Delta t)-\Delta t}{\Delta t} = -kZ(t) + 1000k$ in een vorm krijgen van Z met een streepje en dan de differentiaalvergelijking.
Interviewer: En dat wilde je proberen door iets te doen met wat er achter het =-teken staat? Volgens mij ben je dan al aan het oplossen.
Nils: Ja, maar volgens mij moesten wij voor de differentiaalvergelijking ook dat een beetje oplossen. En dan kreeg je een *e*-macht, en die ging je dan invullen, (…) eh, kreeg je dan in de vorm (*schrijft:*) $-e^{-kt}$.

Hier is sprake van operationeel begrip. Nils stelt een vergelijking met daarin een differentiequotiënt op, die overigens fout is. Hij herinnert zich de procedures bij *e*-machten en probeert die hier te gebruiken. Hij drukt het differentiequotiënt (links van het =-teken) uit in iets wat hij zich herinnert uit een andere situatie.

Dat het opstellen van een differentiaalvergelijking voor leerlingen moeilijk is, blijkt ook uit het hoge percentage *hints*. Slechts twee leerlingen hebben weinig hints nodig (respectievelijk vier en vijf hints); bij de overige elf leerlingen is gemiddeld 36,5 % van alle activiteiten een reactie op een hint, met een standaarddeviatie van 12,6%.

Als we nagaan welke hints er gegeven zijn, dan kunnen we deze het beste karakteriseren als het stellen van een vraag op het moment dat de leerling niet verder komt of een verkeerde weg dreigt in te slaan. Soms gaat het om een aanwijzing. Over het algemeen hebben leerlingen geen strategie voor het opstellen van een differentiaalvergelijking (ondanks de extra lessen over het opstellen van differentiaalvergelijkingen aan zeven van de 13 leerlingen). Illustratief voor het ontbreken van een strategie is de volgende dialoog:

Nils: (*Schrijft:*) $In(t) = 100 + t$
Interviewer: Is dat een differentiaalvergelijking?
Nils: Nee, ik zat net te denken: er moet iets met een *t* en delta *t* in voorkomen. (*Schrijft*:) $t + \Delta t$. Of het moet de afgeleide zijn, of je doet het per stap (*maakt handbeweging)*
Interviewer: Maak ik een herinnering wakker als ik dit opschrijf: $y(t + \Delta t) =$
Nils: Ik dacht dat dat van een kleine verandering was, maar je kan delta *t* ook eens met één minuut opschrijven, dan is die verandering denk ik gewoon *k* keer delta *t*, en dan plus $y(t)$, en dan heb je dat er per minuut één liter bijkomt, dan zou die *k* één moeten zijn, denk ik.

Ook in dit fragment is bij Nils sprake van operationeel begrip. Hij herinnert zich de combinatie *t*, delta *t*, afgeleide en stapsgewijs. De aanwijzing spoort hem aan om te gaan redeneren als eerste stap naar structureel begrip. Hij begint spontaan te praten over veranderingen. Hij redeneert hardop over de betekenis van delta *t* als kleine verandering. De afgeleide speelt geen rol in dit fragment.

Een voorbeeld van onvolledige kennis van het concept afgeleide vinden we geïllustreerd bij Nathan:

Nathan: Dus *dI* gedeeld door *dt* is 1. (*Schrijft:*) $\frac{dI}{dt}=1$. Is eigenlijk ook wel logisch, want hier stond het eigenlijk al: wat er bij komt is steeds 1."
Interviewer: Er horen eenheden bij.
Nathan: 1 liter per minuut.
……
Interviewer: "Is er wel eens op gewezen, dat je dat in de breuk *dI/dt* zo ziet: liters (*wijst op de teller)* per minuut (*wijst op de noemer*)."
Nathan: Nee, daar is niet zo goed op gewezen, maar nu je het zegt, is het inderdaad wel logisch.

Nathan begrijpt het concept afgeleide want hij zegt dat de afgeleide een verandering beschrijft (steeds 1 erbij). Hij laat zien dat hij het proces beheerst, dat wil zeggen: hij schrijft de deling correct op. Voor Nathan is de afgeleide nog geen procept geworden. Het idee dat hij een deling heeft uitgevoerd - wat tot uitdrukking gebracht wordt in de eenheden liter *per* minuut - beseft hij nog niet.

Bij acht van de negen leerlingen met in de *kolom Da* of *Dd* een dicht symbool, leerlingen die dus uiteindelijk een correct model hadden opgesteld, staan hieraan voorafgaand in de kolom Be dichte symbolen. Het verband tussen een correcte differentiaalvergelijking en het juiste gebruik van eenheden lijkt van belang voor het beschrijven van wat meer ingewikkelde veranderingsprocessen, zoals opgave d. Het volgende citaat uit de gereduceerde transcripties licht dit toe:

> *Lex*: In het begin zit er al 400 gram in. *Denkt na*. Hoe je dat precies moet doen weet ik niet meer. (*Schrijft*:) "$\frac{dZ}{dt}$ = instroom 6 gr/min uitstroom...... 2*Z* gr/min." Er zit al 400 gram in. (*Maakt de* $\frac{dZ}{dt}$ *af tot:*) "$\frac{dZ}{dt}$ = 400gr + 6gr/min – 2*Z* gr/min." (*Al schrijvend:*) dat is dan in de verkeerde eenheid.
> *Interviewer*: Je zei net, dat is de verkeerde eenheid. Klopt de eenheid $\frac{dZ}{dt}$ met 2*Z* gr/min en met 6 gr/min?
> *Lex*: Ja, dat is gram per minuut.
> *Interviewer*: En met 400 gram?
> *Lex*: Dat klopt niet.
> *Interviewer*: Wat doen we met die 400 gram?
> *Lex*: Weglaten, het is dadelijk een beginvoorwaarde, die $t = 0$ is 400 gram of zoiets.
> (Later in het interview wordt ook de term 2*Z* op grond van eenheden onjuist bevonden).

Lex begrijpt de afgeleide structureel. Zijn redenering duidt op structureel begrip van het opstellen van een differentiaalvergelijking, omdat hij de verandering blijft benadrukken. Hij blijft zoeken naar een vergelijking die het veranderingsproces weergeeft. Hij komt niet tot de oplossing. Door te redeneren (met hulp) en de inzet van operationeel begrip over het gebruik van dezelfde eenheden in teller en noemer komt hij steeds verder in het oplossingsproces.

De meeste *niet classificeerbare acties* kunnen in twee groepen worden ondergebracht:

i. antwoorden op de vraag wat een differentiaalvergelijking is.
ii. ondoelmatige operationele handelingen zoals het steeds willen "oplossen".

De acties uit de laatste groep hangen ook weer samen met het niet structureel begrijpen van het opstellen van een differentiaalvergelijking. Het geeft aan dat leerlingen een differentiaalvergelijking vaak alleen associëren met het uitvoeren van procedures: je moet iets met een differentiaalvergelijking doen, je moet die oplossen. Dit is terug te vinden in de gegeven antwoorden op de vooraf gestelde vragen over wat een differentiaalvergelijking is. Een duidelijk voorbeeld hiervan wordt gegeven door Maarten. Bij opgave b, waar een differentiaalvergelijking in eenvoudige vorm moest worden opgesteld, waren van zijn 23 acties er zes niet classificeerbaar. De voorstelling die hij van een differentiaalvergelijking had beschreef hij als volgt: "Een differentiaalvergelijking is een vergelijking die de afgeleide is van een meer gecompliceerde formule, die in zijn oplossing een *e*-macht heeft." Deze beschrijving is een voorbeeld van het operationeel (zonder het structureel) begrijpen van een differentiaalvergelijking omdat Maarten het heeft over de afgeleide zonder daarbij een verandering te betrekken.

Er zijn drie leerlingen die de *differentiaalvergelijking van opgave b* via het differentiëren van $I(t) = 100 + t$ opstellen, maar geen van drieën begrijpt dat dit een differentiaalvergelijking is. De vorm $dI/dt = 1$ lijkt in hun ogen niet op de vorm die zij zich voorstellen bij een differentiaalvergelijking (geen structureel begrip omdat er geen sprake is van een verandering). Dit komt overeen met de antwoorden die zij geven op vraag B van de vragenlijst over hun voorstelling van het concept differentiaalvergelijking (Figuur 2):

> $y'' - y' + 2y = 0$ zo iets zat in het examen;
> $y' = 3y$ omdat die onderaan staat;
> $\frac{dy}{dt} = 6e^t$ Ik vind dat wel een leuk voorbeeld en dit was op dit moment het beste wat ik kon bedenken.

Uit de *schriftelijke antwoorden* op de vraag "Wat is een differentiaalvergelijking" (Figuur 2, vraag A) en de mondelinge antwoorden op deze vraag tijdens de interviews komt naar voren dat driekwart van de onderzochte leerlingen het concept differentiaalvergelijking niet structureel begrijpt. Dit kan geïllustreerd worden met uitingen van Leander. Hij geeft het volgende schriftelijke antwoord: "Hoe een bepaalde functiewaarde verandert ten opzichte van een verandering in de voorwaarde". Leander begrijpt de differentiaalvergelijking niet structureel want hij heeft het over een verandering in de voorwaarde in plaats van een verandering in het (veranderings)proces.

En tijdens het interview zegt hij:

> dI/dt is de verandering van de inhoud als de tijd verandert, dus 1 liter per minuut komt er steeds bij, en schrijft op: $\frac{dI}{dt} = t$.

Leander begrijpt de differentiaalvergelijking operationeel want hij is in staat een vergelijking op te stellen met een differentiaalquotiënt (afgeleide). Hij begrijpt de differentiaalvergelijking niet structureel omdat hij niet kan aangeven wélke verandering de afgeleide weergeeft. Hij beseft niet *hoe* de afgeleide de verandering beschrijft.

4 Conclusies en aanbevelingen

De centrale vraag in deze studie was in welke mate leerlingen het opstellen van modellen van veranderingsprocessen met differentiaalvergelijkingen operationeel dan wel structureel zouden begrijpen. Uit onze gegevens blijkt dat leerlingen niet in staat zijn het veranderingsproces als proces te ordenen en om te zetten in een vergelijking met wiskundige begrippen (structureel begrip). Zij grijpen terug op bekend voorkomende uitdrukkingen (operationeel begrip). In detail gaat het om de volgende aspecten:

i. Leerlingen associëren een differentiaalvergelijking met het begrip exponentiele groei. Dit wordt veroorzaakt door de nadruk op exponentiële groei en de daarbij behorende differentiaalvergelijkingen in de schoolmethodes. Leerlingen voeren als gevolg daarvan procedures uit die behoren bij exponentiële groei, terwijl ze die niet begrijpen.
ii. Voor leerlingen krijgt het opstellen van differentiaalvergelijkingen structuur door de eenheden erbij te betrekken. De juistheid van de opgestelde vergelijking is te controleren door naar de eenheden te kijken: de eenheden in elke term van de vergelijking moeten overeenstemmen. In het natuurkundeonderwijs wordt dit expliciet onderwezen[3]. Het gevolg van het betrekken van eenheden bij het opstellen van differentiaalvergelijkingen is dat leerlingen de differentiaalvergelijking structureel gaan begrijpen.
iii. De meeste leerlingen kennen geen strategie om differentiaalvergelijkingen op te stellen, zij “zien” de verandering niet. Dit hangt samen met het niet doeltreffend verkennen van de situatie. Ze missen een eerste aanzet tot structureel begrip.
iv. Leerlingen verwarren een beschrijving van de verandering aan de hand van de afgeleide met een rechtstreekse beschrijving zonder daarin de verandering te betrekken. Zij zien niet in hóe de verandering beschreven kan worden, namelijk met een afgeleide.

De associatie met een exponentieel verband, die zich ook uitte in het veelvuldig voorkomen van asymptotische grafieken bevestigt de constatering van Arslan, Chaachoua en Laborde (2004, p. 3): “….we are faced, notably among the beginners, with an association ‘differential equation ←→ exponential.’”

Dit onderzoek naar het operationeel dan wel structureel begrijpen van het opstellen van differentiaalvergelijkingen als belangrijke voorwaarde voor het modelleren van veranderingsprocessen, is uitgevoerd in het kader van een studie naar het ontwerpen van lesmateriaal. Op grond van de resultaten van dit onderzoek komen we tot de volgende concrete aanbevelingen voor het introduceren van het structureel begrijpen van een differentiaalvergelijking:

i. Begin met eenvoudige veranderingsprocessen die als tussenstap de vorm $\Delta y/\Delta x$ oplevert om vervolgens te komen tot dy/dx, y' en $f'(x)$. Het strekt tot aanbeveling de relatie tussen de verschillende representatievormen van de afgeleide in allerlei situatie te laten verwoorden (Roorda. 2012). Hiermee kan structureel begrip worden ontwikkeld.
ii. Besteed in de verkenningsfase aandacht aan structureel begrip op basis van operationeel begrip door te *vereenvoudigen* en *aannames* te maken.
iii. Gebruik voor de gevonden vergelijkingen nog niet het woord differentiaalvergelijking, maar bijvoorbeeld ‘veranderingsvergelijking’, naar analogie van Rasmussen en Marrongelle (2006). Hiermee kan het structurele begrip worden gestimuleerd.
iv. Behandel naast exponentiële groeiprocessen minstens evenveel processen waarbij de verandering van de afhankelijke variabele niet evenredig is met de onafhankelijke variabele. Daardoor kan het operationele begrip functioneel worden gemaakt ter ondersteuning van het structurele begrip.

De verwachting dat de leerlingen op deze wijze de modelleereigenschap van differentiaalvergelijkingen zullen begrijpen zal in een volgend onderzoek worden getoetst.

v. Besteed aandacht aan de afgeleide als breuk in relatie tot het uitvoeren van procedures (proces) én als maat voor verandering (concept). Het feit dat en hoe de afgeleide de momentane verandering uitdrukt kan op die wijze zichtbaar gemaakt worden. Een suggestie daarbij is dat de uitdrukking "veranderingsverhouding" voor de afgeleide behulpzaam kan zijn. Met deze uitdrukking wordt duidelijk dat een afgeleide ook een deling is. Bij het modelleren van veranderingsprocessen kunnen dan daarna de eenheden ter sprake komen, in de afgeleide en in de rest van de vergelijking (procept) als aanzet tot het structureel begrijpen van een differentiaalvergelijking.

5 Discussie

Het modelleren van veranderingsprocessen sluit nauw aan bij Freudenthals (1984) ideeën over didactische fenomenologie. Freudenthal pleit ervoor om uit te gaan van verschijnselen die een ordening vragen, van waaruit leerlingen zich mentale objecten eigen maken. De mentale objecten zijn in de ogen van Freudenthal nodig om tot wiskundige begripsontwikkeling te komen. Freudenthal zet zijn visie naast de theorie van Bruner (1966) over de ontwikkeling in het denken gebruikmakend van representaties: enactief (het gemaakte), iconisch, en symbolisch. Zowel Sfard (1991) als Tall (2008) bouwt voort op Bruners theorie over fasegewijze cognitieve groei. In de context van veranderingsprocessen blijkt uit deze studie dat wiskundig begrip start met het ordenen van verschijnselen, vereenvoudigen en het maken van aannames in de verkennende fase. Het wiskundig begrip vervolgt de ordening met Sfards onderscheid tussen operationeel begrip (het kunnen opstellen van een vergelijking waarin een afgeleide voorkomt) en structureel begrip (het kunnen verantwoorden dat de vergelijking een veranderingsproces beschrijft). De studie brengt in kaart dat de ordening van veranderingsprocessen aan de hand van het opstellen van een differentiaalvergelijking kan worden gestructureerd door expliciet aandacht te besteden aan de eenheden. De eenheden die in elke term van de differentiaalvergelijking een rol spelen, kunnen reïficatie (Sfard, 1991) stimuleren om tot structureel begrip te komen.

Het ordenen van verschijnselen dient doeltreffend te gebeuren, zoals uit deze studie blijkt. Dat betekent dat docenten zich er bewust van moeten zijn dat structureel begrip van veranderingsverschijnselen inhoudt dat het begrip afgeleide een richtinggevende rol speelt. De afgeleide als *proces* is een kernelement als het gaat om de formulering van een veranderingsproces aan de hand van een differentiaalvergelijking (Tall, 2008). De afgeleide als *concept* is noodzakelijk om te doorgronden hoe de afgeleide de verandering vastlegt. Het voor leerlingen duidelijk maken van dit subtiele verschil in betekenis van het concept afgeleide vereist van docenten een aangepaste didactiek. Rasmussen en Marongelle (2006) pleiten in dit verband voor plenaire klassengesprekken om de vorming van mentale objecten te sturen en te leiden teneinde tot wiskundige begripsontwikkeling te komen.

De resultaten uit dit onderzoek bevestigen Bakkers (2007) resultaten dat leerlingen de proceskant van wiskundige concepten eerder begrijpen dan de objectkant, en Sfards bevindingen dat operationeel begrip eerder plaatsvindt dan structureel begrip. Het is nu eenmaal gemakkelijker om iets na te doen, dan iets te moeten bedenken. In dit onderzoek is zelfs sprake van direct overnemen. Dit overnemen laat zien dat operationeel begrip niet altijd van inzicht getuigt. Een voorwaarde om van operationeel begrip tot structureel begrip te kunnen komen is dat er reïficatie optreedt. Daarvoor is het noodzakelijk dat de procedures niet alleen kunnen worden nagedaan, maar ook worden begrepen. Aansluitend bij Doorman (2007) zou nader onderzoek zich kunnen richten op een experimenteerruimte voor leerlingen om proefondervindelijk het verschil te ervaren tussen rechtstreekse toename (verandering) en de *snelheid* van verandering. Vervolgens zou te onderzoeken zijn of deze enactieve benadering tot meer inzicht in de operationele handelingen zal leiden, en uiteindelijk tot structureel inzicht.

Noten

1 Dit onderzoek beperkt zich tot eerste-orde differentiaalvergelijkingen, omdat bij het opstellen hiervan gekozen kan worden of de differentiaalvergelijkingen via differentie-vergelijkingen en -quotiënten worden opgesteld (de discrete benadering), of rechtstreeks vanuit het begrip afgeleide (de continue benadering). Bij het toepassen van bijvoorbeeld de wet van Newton $F = m*a$, waar a een *tweede* afgeleide is, bestaat deze keuzemogelijkheid niet.

2 De acties van leerlingen die kozen voor de continue benadering werden gecodeerd in de kolommen Cw en Da, de acties van de leerlingen die kozen voor de discrete benadering in de kolommen Cd en Dd.

3 Het vergelijken van eenheden voor en achter het =-teken, komt niet voor in de huidige wiskundemethodes op school.

Literatuur

Arslan, S., Chaachoua, H., & Laborde, C. (2004). Reflections on the teaching of differential equations: What effects of a teaching to algebraic dominance? *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education, ICME-10, Copenhagen, Denmark.* Opgehaald op 16 november 2010, van http://class.pedf.cuni.cz/katedra/yerme/clanky_ucast/Arslan.pdf.

Bakker, A. (2007). Diagrammatisch redeneren als basis voor begripsontwikkeling in het statistiekonderwijs. Pedagogische Studiën, 84(5), 340-357.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). “Filling up” – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th European Congress on Mathematics Education* (pp. 1623-1633). Opgehaald 16 mei 2011, van http://erme-web.free.fr/CERME4/CERME4 WG13.pdf.

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction.* New York: Norton.

Chaachoua, H., & Saglan, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications, 25*(1), 15-22.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO). (2007). *Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO). (2008). *Conceptexamenprogramma 2013 wiskunde D.* Utrecht: cTWO.

Doorman, L. M. (2007). Wiskundeonderwijs met computeractiviteiten vraagt constructieruimte voor leerlingen. Pedagogische Studiën, 84(5), 375-390.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren.* Utrecht: OW&OC.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students’ conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Heck, A. (2012). *Perspectives on and Integrated Computer Learning Environment*. Dissertatie. Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, Nederland.

Kerngroep - Universiteit Twente. (2007). Wiskunde in Wetenschap, visie op een domein in wiskunde D. *Euclides, 82*(5), 173-175.

Kidron, Y. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: The complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 197-216.

Löhner, S., Joolingen, W. R. van, Savelsbergh, E. R., & Hout-Wolters, B. H. A. M. van. (2005). Students’ reasoning during modeling in an inquiry learning environment. *Computers in Human Behavior*, *21*, 441-461.

Nersessian, N. J. (1995). Should physicists preach what they practice? Constructive modeling in doing and learning physics. *Science & Education*, *4*, 203–226.

Rasmussen, C. L., & King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 30*(2), 161-172.

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students’ understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 55-87.

Rasmussen, C. L., & Marrongelle, K. (2006). Pedagogical content tools: Integrating student reasoning and mathematics into instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 388–420.

Rasmussen, C. L., & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: a case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 195-210.

Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering. Ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het begrip afgeleide.* Dissertatie. Rijksuniversiteit Groningen, Groningen, Nederland.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Spandaw, J. H., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren. In P. Drijvers, B. Zwaneveld & A. van Streun (red.), *Handboek Wiskundedidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Steed, M. (1992). Stella, a simulation construction kit: Cognitive process and educational implications. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *11*(1), 39-52.

Tall, D. O. (2008). A life-time's journey from definition and deduction to ambiguity and insight. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 183–196.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30,* 161-177.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Dissertatie. Universiteit Utrecht. Utrecht: IOWO.

Van Joolingen, W. R., de Jong, T., Lazonder, A. W., Savelsbergh, E. R., & Manlove, S. (2005). Co-Lab: research and development of an online learning environment for collaborative scientific discovery learning. *Computers in Human Behavior*, *21*, 671- 688.

Verhoef, N. C., & Tall, D. O. (2011). Teacher's professional development through lesson study: effects on mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 297-304). Ankara: Turkije.

Verhulst, F. (2008). *Modellen en dynamische systemen*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Zandieh, M. (1997). *The evolution of students understanding of the concept of derivative.* Dissertation. Oregon State University, Corvallis, United States.

Zandieh, M., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 1-17.

Zwarteveen, J. A., Verhoef, N. C., Hendrikse H. P., & Pieters, J. M. (2011, juni). *Differentiaalvergelijkingen begrijpen.* Paper gepresenteerd op de Onderwijs Research Dagen, Maastricht, Nederland.

Zwarteveen, J. A., Verhoef, N. C., Hendrikse, H. P., & Pieters, J.M. (2012, juni). *Differentiaalvergelijkingen begrijpen: Het wiskundig denken bij het opstellen van differentiaalvergelijkingen in kaart brengen.* Paper gepresenteerd op de Onderwijs Research Dagen, Wageningen, Nederland.

Auteurs

N. C. Verhoef, W. R. van Joolingen en **J.M. Pieters** zijn verbonden aan het Instituut ELAN van de Universiteit Twente.
J.A. Zwarteveen-Roosenbrand is verbonden aan het Deltion Sprint Lyceum.

Correspondentieadres: N.C. Verhoef, Instituut ELAN, Universiteit Twente, Postbus 217, 7500 AE Enschede. Email: n.c.verhoef@utwente.nl

Abstract

Students' mathematics understanding in modelling processes of change

In the context of a design study for lesson material for mathematical modelling of processes of change, modelling processes were studied that were executed by students in the highest grade of Dutch pre-university education. The research question was whether these students understood the nature of differential equations as descriptors of such processes. Fourteen students participated in the study, all of who followed the advanced mathematics curriculum. Using an open questionnaire and an assignment that was solved while thinking aloud, data were collected about students' perceptions of differential equations and the way they model processes of change. Students remained relatively long in an orientation phase and often tried to find a direct formula to describe the process, rather than to formulate a differential equation. They struggled with the concept of the derivative as a description of change. An important outcome is the use of physical units contributing to successful modelling exercises.