Teaching formal mathematics in primary education

Academisch proefschrift Vrije Universiteit Amsterdam, 2003, 220 pagina's
ISBN 90-73346-52-5
R.Keijzer

"A demand of our present day technological society is that human beings need to learn to deal with abstract concepts and formal relations", zo luidt de eerste zin van de 'summary' van het proefschrift van Keijzer. Met deze zin is een hoofdgedachte waar in dit onderzoek van wordt uitgegaan kernachtig gerepresenteerd. Daarom, zo vervolgt Keijzer, is het belangrijk dat leerlingen strategieën leren op het gebied van 'symbolisation, modelling, abstraction, formalisation and generalisation'. Dit credo zal wellicht de aandacht trekken van onderzoekers op het gebied van de wiskundedidactiek die vrezen dat het uitgaan van contexten, van problemen die kinderen aanspreken en van eigen informele werkwijzen van kinderen (om maar enkele uitgangspunten te noemen van de realistische didactiek) onvoldoende resulteert in volwaardige denkprestaties op hoog mathematisch niveau, zoals het formaliseren of het leveren van bewijzen.

Op deze "hogere" processen van mathematiseren (symboliseren, etc.) richt Keijzer zich juist in zijn promotieonderzoek. Hij wil onderzoeken hoe bij 10-11-jarige leerlingen in het basisonderwijs de processen van mathematiseren verlopen, dat wil zeggen, hoe ze abstracte en formele wiskundige concepten leren. Dit wordt onderzocht op het gebied van de gebroken getallen, ofwel breuken. Daarmee richt hij zich in zijn onderzoek op een van de lastigste gebieden van het basisschoolprogramma: de breuken. Waarom moeten leerlingen juist op dat gebied leren om formele operaties uit te voeren? Wanneer men volwassenen vraagt welke breuk groter is: 11/12 of 12/13, dan luidt het antwoord in ongeveer 5 van de 10 gevallen dat 11/12 groter is. We kunnen ook zeggen dat ongeveer 50% niet het juiste antwoord weet, en dat lokt de vraag uit of rekenen met procenten niet meer voor de hand ligt. Immers 25% - 20% is veel simpeler uit te rekenen dan 1/4 - 1/5.

De reden waarom de promovendus er niettemin voor heeft gekozen om juist op het gebied van de breuken na te gaan of leerlingen tot formele, modelmatige operaties in staat zijn, is dat de tegenwoordige maatschappij vraagt dat leerlingen kunnen opereren met abstracte en formele relaties (zie de openingszin van zijn samenvatting en van deze recensie). Gecijferdheid, soms ook wel 'mathematical literacy' genoemd (Jablonka 2003), houdt in dat leerlingen inzicht verwerven in getallen, dus ook gebroken getallen. Het gaat Keijzer erom dat leerlingen kunnen beredeneren waarom bijvoorbeeld 1/5 + 1 /4 minder is dan 1/2. Of álle leerlingen dat formele niveau behalen - uit eerder onderzoek (Streefland, 1988) bleek het tegendeel - is een vraag waaraan ook in dit onderzoek aandacht wordt besteed.

De kernhypothese van het onderzoek luidt: "Leerlingen die breuken leren in een leergang waarin de getallenlijn centraal staat en waarin betekenissen tot stand komen via onderhandelen, zullen betere resultaten behalen dan leerlingen die breuken leren in een meer traditionele setting, waar de cirkel het centrale breukenmodel is, en waar leren vooral een solitaire aangelegenheid is". Uit deze hypothese is af te leiden dat er sprake is van een drietal variabelen die de eventuele betere resultaten in de proefgroep, als gevolg van de interventie, kunnen verklaren: (1) de getallenlijn als model, (2) betekenissen en (3) interactie.

In de controlegroep wordt het "eerlijk verdelen"-model gebruikt (waar ook Streefland van uitging) en werken de leerlingen vooral individueel, terwijl betekenissen niet worden benadrukt. Als "overkoepelend onderzoeksdesign" is gekozen voor ontwikkelingsonderzoek en dat is onderzoek dat niet alleen bijdraagt aan de vorming van wetenschappelijke kennis, maar dat ook leidt tot "verbetering van het reken-wiskundeonderwijs". De promovendus geeft een duidelijke verantwoording van het gekozen (quasi-experimentele) onderzoeksdesign. Er worden voor- en nametingen verricht, er worden gestandaardiseerde toetsen aan het begin, halverwege en aan het eind van het onderzoeksjaar afgenomen om de algemeen wiskundige vaardigheden te toetsen, en drie gestandaardiseerde interviews om de breukenkennis vast te kunnen stellen.

Aan het onderzoek werd deelgenomen door 20 leerlingen, waarvan er 10 de experimentele leergang (meten op getallenlijn) en 10 de traditionele leergang (delen van de cirkel) volgden. Deze aantallen zijn niet indrukwekkend, maar de onderzoeker wilde er in zijn studie de nadruk op leggen de processen van mathematisering "in de diepte" op te sporen. Dat geschiedde op basis van interviews waarin de leerlingen breukproblemen moesten oplossen (bijvoorbeeld het vergelijken van breuken). De onderzoeker ondersteunde dit proces zonodig met gestandaardiseerde hulp. De manier waarop en de mate waarin leerlingen profiteren van hulp is dan indicatief. Er werden aldus gegevens verzameld over onder meer de denkprocessen, de wijze van toepassing van geleerde kennis, en het gebruik van "breukentaal".

De toetsing van de *algemeen rekenwiskundige vaardigheden* leverde differentiële effecten op. Op twee onderdelen (zoals meten en meetkunde) presteren de leerlingen uit de experimentele groep (e-groep) beter dan de leerlingen uit de controlegroep (c-groep). Zwakke rekenaars profiteren meer van het traditionele programma dan van het experimentele programma, terwijl de sterkste rekenaars in de e-groep meer van het experimentele programma profiteren dan de sterkste rekenaars in de c-groep van het traditionele programma.

Eveneens is getoetst in welke mate de leerlingen zich *inzicht in breuken* hebben eigengemaakt. Daaruit bleek dat goede en zwakke rekenaars in gelijke mate profiteren van de experimentele leergang, vergeleken met de leerlingen in de controleconditie. Het is waarschijnlijk, zegt de onderzoeker, dat de leerlingen in de e-groep adequater reageerden op de (gestandaardiseerde) hulp die ze kregen, omdat de hulp ze in staat stelde de werkwijzen die ze geleerd hadden toe te passen (schema's opstellen, e.d.). Juist de sterke leerlingen gebruiken meer wiskundetaal en "hogere orde" redeneertaal (als - dan, stel dat). Dat betekent dat als een wiskundige discussie totstandkomt, zij het meest in het voordeel zijn, vergeleken met de leerlingen in de c-groep, aan wie tijdens het experiment interactie onthouden werd.

Samengevat vond de onderzoeker dat de leerlingen in de e-groep beter presteerden op het gebied van breuken dan de leerlingen in de c-groep. Kijken we naar de algemeen wiskundige vaardigheden, dan valt op dat de leerlingen die bovengemiddeld scoren, meer baat hebben bij het werken met het experimentele programma dan met het controle programma. Bovendien bleek dat "een meerderheid van de 10-11-jarige leerlingen formele wiskundige concepten kunnen leren" en met name hiernaar was Keijzer op zoek. Toch lijkt het nog te vroeg om algemene conclusies te trekken. Enige terughoudendheid is gewenst met het oog op het bescheiden aantal leerlingen. Bovendien is uit deze studie eveneens gebleken dat een deel van de leerlingen aanzienlijke moeilijkheden ondervond bij het leren van formele breuken.

Streefland vond in zijn studie dat slechts 4 van de 13 (intensief begeleide) leerlingen breukenproblemen oplosten op basis van regels en verbanden, en dat is al met al een bescheiden succes. Het succespercentage van Keijzer is vergelijkbaar en in grote lijnen zijn de onderzoeksbevindingen van Streefland dus bevestigd.

Nu is het opvallend dat Streefland werkte met een programma dat in grote lijnen overeenkomt met het "traditionele" programma dat werd gebruikt in de c-groep van Keijzer. Hoe is het te verklaren dat leerlingen in beide onderzoeken, op het gebied van de breuken in staat zijn tot formaliseren? Er werd bovenal de aandacht op gevestigd dat drie variabelen een verklarende rol spelen: (1) getallenlijn als model, (2) betekenissen en (3) interactie. Streefland gebruikte de cirkel als breukenmodel (pizza's "eerlijk verdelen") en van dat model werd ook in Keijzers c-groep uitgegaan, maar de leerlingen in die c-groep hadden van het werken volgens dat model juist weinig baat. Waarom profiteerden ze er in Streeflands onderzoek dan wél van? Kan het zijn dat dit werd veroorzaakt door de twee andere variabelen namelijk: betekenissen en vooral de talrijke interactieve interventies van de onderzoeker? De gedachte lijkt verdedigbaar dat de verklaring van het gegeven dat een aantal leerlingen in beide onderzoeken op formeel niveau breuken leerde, niet zozeer in de experimentele programma's moet worden gezocht, maar vooral in de hoge kwaliteit van de interactie die bij de leerlingen de nodige vindingrijkheid opriep, en het gevoel met iets interessants, iets dat betekenis heeft, bezig te zijn. De leerlingen in de c-groep van Keijzer werkten individueel en ondervonden deze stimulans dus niet.

Hoe het ook zij, het is beslist een verdienste van het onderzoek van Keijzer dat is aangetoond dat leerlingen in principe in staat zijn om op een van de moeilijkste onderdelen van het programma van de basisschool, de breuken, een hoog wiskundig formeel niveau van denken en generalisatie te bereiken. De promovendus maakt bovendien duidelijk (zie onder meer pagina 98 en 143) dat differentiatie in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, zeker als het gaat om zulke lastige onderwerpen als breuken, noodzakelijk is. Differentiatie, echter niet in die zin dat voor de zwakkere leerlingen leerstofonderdelen moeten worden geschrapt, maar dat moet worden gestreefd naar lagere, deels contextgebonden, niveaus van inzicht.

Literatuur

Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In A. J.Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S.Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 75-102). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1988). *"Realistisch breukenonderwijs". Onderzoek en ontwikkeling van een nieuwe leergang*. Vakgroep OW&OC, RUU.

J.M.C.Nelissen
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht