

Leren probleemoplossen in het wiskundeonderwijs

J. MEIJER*

Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek,
Universiteit van Amsterdam

J. CHR. PERRENET

Vakgroep Onderwijskunde, Rijksuniversiteit
Utrecht

F. RIEMERSMA

Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek,
Universiteit van Amsterdam

Samenvatting

Om wiskundige problemen op te kunnen lossen moet verworven wiskundige kennis kunnen worden toegepast in nieuwe, onbekende (probleem-)situaties. In dit artikel wordt overdracht (transfer) van kennis gezien vanuit de cognitieve psychologie en de wiskunde-didactiek. Op grond van cognitief-psychologische theorieën wordt op het belang van zowel leren door voorbeelden als leren door explicatie en oefening gewezen. Tevens wordt aangegeven hoe het stapsgewijs bieden van hulp aan leerlingen bij het oplossen van problemen voordelen kan opleveren voor minder vaardige leerlingen zonder afbreuk te doen aan hun eigen ideeën en initiatieven.

Vanuit een wiskundig-didactische invalshoek wordt het begrip transfer specifieke inhoud gegeven. Daarnaast komen voor- en nadelen van heuristische en algoritmische onderwijsmethoden aan de orde in verband met de didactische opzet van verschillende wiskunde-leergangen.

Ten slotte wordt een onderwijsmethode geschetst, waarbij de nadruk ligt op het leren oplossen van wiskundige problemen. Uitgangspunt van deze methode is dat het herstructureren van leerstofinhouden en presentatie niet voldoende is om de probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen te bevorderen, maar dat tevens aan de rol van de leerkracht en aan ande-

re werkvormen dan klassikale uitleg bijzondere aandacht moet worden besteed.

1 Inleiding

De maatschappelijke veranderingen die zich in de afgelopen decennia voltrokken hebben, roepen vaak problemen op waar geen pasklare oplossingen voor zijn. Beschikbare kennis dient getransformeerd te worden om antwoorden te kunnen geven op nieuwe, onbekende problemen. Naast kennis van feiten wordt de toepassing van kennis steeds belangrijker. Ook in het wiskunde-onderwijs wordt *weten hoe* steeds belangrijker ten opzichte van *weten dat*. Het zinvol en doelgericht kunnen toepassen van beschikbare kennis vereist *transfer* (overdracht) van die kennis. Transfer kan formeel gedefinieerd worden als de overdracht van in taaksituatie X verworven kennis en vaardigheden naar een andere nieuwe, taaksituatie Y (Ellis, 1965).

Het is een algemeen aanvaarde stelling dat begaafdheid (intelligentie) van leerlingen in het voortgezet onderwijs hun vermogen tot transfer van eerder verworven vakinhoudelijke kennis beïnvloedt. In het onderwijs wordt in het algemeen getracht het transfervermogen van leerlingen te bevorderen. Uitgangspunt van dit artikel is dat transfer geen vanzelfsprekende zaak is. In het onderwijs dient expliciet aandacht te worden besteed aan overdracht van kennis vanuit de context waarin die kennis is verworven naar andere kennisdomeinen. Met andere woorden: methoden waarmee transfer van kennis bevorderd kan worden, dienen tot *onderwerp* van onderwijs gemaakt te worden.

Om deze stelling te ondersteunen, wordt het begrip transfer behandeld in het kader van zowel de cognitieve psychologie als de didactiek van de wiskunde. Vanuit beide invalshoeken wordt aangegeven dat het reflecteren over de denkprocessen die een functie hebben bij verwerving en toepassing van kennis het vermogen tot transfer kan bevorderen. Daartoe moeten die denkprocessen kunnen worden beschreven en onderwezen. De verwerving van

* De auteurs bedanken mevr. drs. E. van Eck, W. E. Groen en drs. H. van Daalen voor hun ondersteunende commentaar.

een taal waarmee een beschrijving van dergelijke denkprocessen mogelijk is, stelt eisen aan het curriculum en de leerkracht.

2 *Het transfer-vraagstuk cognitief-psychologisch gezien*

Vakinhoudelijke problemen zijn geen standaard-opgaven, waarop het antwoord door middel van afwikkeling van een bekend en geoefend handelingsverloop kan worden gevonden. Bij het zoeken naar de oplossing van een wiskundig probleem zullen leerlingen dienen te zoeken naar middelen om de discrepantie tussen beschikbare en benodigde wiskundige kennis op te heffen. Die middelen zullen moeten worden ontleend aan reeds verworven kennis en vaardigheden. Voor het oplossen van vakinhoudelijke problemen is transfer van de vakkennis een noodzakelijke voorwaarde.

In de cognitieve psychologie wordt kennis beschouwd als georganiseerd in schema's, die de structuur en ordening van elementen uit die kennis weergeven. Een kennischema bevat informatie over eigenschappen van een bepaald begrip of object en informatie over de relaties met andere begrippen of objecten. Ook oplossingsmethoden voor wiskundige problemen kunnen als kennischema's worden weergegeven. Een voorbeeld van een eenvoudig algebraïsch kennischema is het vereenvoudigen van het merkwaardig produkt: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. De inhoud van een dergelijk kennischema kan vanzelfsprekend meeromvattend zijn dan hier aangegeven: ook kennis omtrent variabelen en parameters in algebraïsche expressies kan aan bovenstaand schema zijn gekoppeld.

Voor de overdracht van de inhoud van een kennischema naar een nieuwe, tot dusver onbekende situatie zal die kennis in het algemeen veranderd moeten worden. Transfer vereist het wijzigen of aanpassen van kennischema's.

2.1 *Generalisatie, specialisatie en analogie* Belangrijke principes bij het veranderen van kennischema's zijn generalisatie, specialisatie en analoog redeneren (cf. Goldstein, 1982).

Voor het leren van algemene principes door middel van voorbeelden (*generalisatie*) is het nodig om kenmerken van de voorbeelden al-

gemener te omschrijven. Het herkennen van een merkwaardig produkt in de uitdrukking $(a + b - c)(a + b + c)$ is alleen mogelijk als bij een merkwaardig produkt niet alleen aan produkten van tweetermen gedacht wordt.

Voor het leren herkennen van voorbeelden van algemene principes (*specialisatie*) moeten de kenmerken van de algemene principes specifiek worden omschreven. Een voorbeeld is het instantiëren van getallen in algebraïsche formules, die bestaan uit relaties tussen variabelen die zijn weergegeven met behulp van symbolen.

Ten slotte kunnen nieuwe kennischema's worden opgebouwd op grond van *analogie* met beschikbare kennis (Norman & Rumelhart, 1981). De relaties tussen kennis-elementen worden dan bijvoorbeeld constant gehouden, maar de inhoud van de elementen zelf wordt gewijzigd. Een voorbeeld met betrekking tot de meetkunde: een ruit staat tot een parallelogram zoals een vierkant staat tot een rechthoek.

Met voornoemde drie principes kunnen niet alle vormen van transfer voldoende verklaard worden. Zij bieden echter een redelijke grondslag voor de beschrijving van het proces van overdracht van reeds verworven kennis naar nieuwe, onbekende situaties.

2.2 *Leren door voorbeelden*

Vakinhoudelijke begrippen zijn op verschillende, hiërarchische niveau's geordend. Een vakinhoudelijke definitie kan gedeeltelijk worden opgevat als een regel, die aangeeft welke klasse van objecten of toestanden wel en welke niet tot het betreffende begrip gerekend kan worden. Het leren van een algemene beschrijving van objecten of toestanden door middel van voorbeelden zal gemakkelijker verlopen, naarmate de gegeven voorbeelden sterker benadrukken wat ze gemeenschappelijk hebben en waarin ze verschillen. Op relevante kenmerken dienen de voorbeelden overeen te stemmen, terwijl ze van elkaar moeten verschillen voor wat betreft de irrelevante kenmerken.

Hoe sterker de voorbeelden van een bepaald begrip overeenkomen, hoe beperkter de omschrijving van dit begrip zal zijn. Enigszins afwijkende voorbeelden zullen niet herkend worden. Zo zal het oplossen van een reeks sterk op elkaar gelijkende algebraïsche vergelijkingen wel kunnen leiden tot inprenting van

de betreffende oplossingsmethode, maar niet tot het herkennen van qua vorm enigszins afwijkende vergelijkingen waarop dezelfde oplossingsmethode van toepassing is. Alleen overdracht naar sterk verwante vraagstukken is mogelijk ('near transfer'). Te sterke specialisatie leidt tot beperkte toepasbaarheid en geringe wendbaarheid van kennis.

Hoe sterker voorbeelden van elkaar verschillen, des te algemener zal de klasse-omschrijving moeten worden. Transfer naar verder verwijderde domeinen ('far transfer') zou dan mogelijk moeten zijn. Consequentie van het geven van voorbeelden die sterk van elkaar verschillen is echter, dat de geleerde algemene omschrijving niet nauwkeurig zal differentiëren. Het risico bestaat, dat bij andere klassen behorende instanties toch tot de geleerde klasse gerekend zullen worden. Er is sprake van overgeneralisatie wanneer klasse-omschrijvingen zo vaag worden, dat ze op bijna elke instantie 'passen', en daardoor zinledig zijn (niet kunnen onderscheiden van andere klassen).

Zowel uit onderzoekingen naar begripsvorming met betrekking tot in de natuurlijke taal voorkomende categorieën (Rosch & Lloyd, 1978) als uit theorievorming binnen de artificiële intelligentie (Simon & Siklóssy, 1972) is naar voren gekomen, dat overgeneralisatie al snel kan optreden als voorbeelden te sterk van elkaar verschillen. Winston (1978) geeft aan dat de kans op overgeneralisatie verminderd kan worden door het geven van tegen- en vooral bijna-voorbeelden.

2.3 *Heuristieken versus algoritmen*

In het voorgaande werd steeds uitgegaan van het leren door middel van voorbeelden als voornaamste principe voor de begripsvorming. Deze benadering, die er vanuit gaat dat complexe begrippen op grond van eenvoudiger begrippen worden opgebouwd vinden we terug in de theorie over leerhiërarchieën van Gagné (1968).

Op het belang van het complementaire idee, de opname van eenvoudige kennisstructuren in meeromvattende, wordt door diverse auteurs (Ausubel, 1961; Davydow, 1972; Reigeluth, 1985) gewezen. Ausubel propageert het gebruik van zogenaamde 'advance organizers' in het onderwijs; deze kunnen worden beschouwd als globale kennisstructuren die de opname van eenvoudiger, ondergeschikte

kennisschema's zouden moeten vergemakkelijken. Davydow stelt dat het onderwijzen van abstracte begrippen vooraf moet gaan aan het geven van concrete voorbeelden. Reigeluth vindt op grond van het zogenaamde 'elaboratie-principe' dat leerstof geordend dient te worden van algemeen naar specifiek en ook in die volgorde gepresenteerd moet worden.

De beschreven theoretische benaderingen worden teruggevonden in onderwijsstrategieën die worden gebruikt om het vermogen tot transfer van het geleerde door leerlingen te bevorderen. Er kan worden gesproken van een 'bottom up' (van specifiek naar algemeen) en een 'top down' benadering (van algemeen naar specifiek) bij de volgorde van presentatie van leerstof. Deze twee uitgangspunten komen tot uiting in respectievelijk 'zelf ontdekend' leren en leren door middel van explicatie en oefening.

Bij de eerste benadering ligt de nadruk op het zoveel mogelijk vrijlaten van de leerling. De instructie wordt beperkt tot globale aanwijzingen, die als leidraad kunnen dienen voor het vinden van een goed antwoord (*heuristieken*). Door het gebruik van heuristieken zou de leerling in staat zijn kennis naar nieuwe domeinen over te dragen of te generaliseren.

Bij de tweede benadering worden na de introductie van een algemeen begrip veel voorbeelden daarvan behandeld. Er worden *algoritmen* aangeleerd die de toepassing van bepaalde kennis in een zo duidelijk mogelijk omschreven domein kunnen sturen en, mits correct toegepast, zullen leiden naar een oplossing.

Nadeel van de algoritmische aanpak is dat de toe te passen kennis door het uitgebreid oefenen en de beperkte toepassingsmogelijkheden van het algoritme te sterk gebonden wordt aan een bepaald kennisdomein, waardoor transfer des te moeilijker tot stand komt. Daar zijn in de literatuur verschillende namen voor gegeven: 'Einstellung', set vorming, rigiditeit en fixatie. De mate van fixatie op een bepaald algoritme hangt overigens wel af van de diversiteit van de geoefende algoritmen (Van 't Riet & De Leeuw, 1979).

Het nadeel van de bottom-up of heuristische aanpak is dat leerlingen met een sterke behoefte aan pre-structurering van de leerstof er weinig van profiteren (cf. Resnick & Ford, 1981). Deze leerlingen zijn onvoldoende in staat zelf de verbanden te leggen tussen de

aangeboden leerstof-elementen. Leerlingen met een sterke behoefte aan pre-structurering van probleemsituaties zouden dus meer gebaat zijn bij algoritmische dan bij heuristische instructies.

Een compromis tussen beide benaderingen kan worden omschreven als 'guided discovery'. Uitgangspunt hierbij is dat men de leerling zijn gang laat gaan totdat duidelijk een impasse is bereikt. Op dat moment wordt hulp geboden om de leerling weer op weg te helpen. Als de hulp-aanwijzingen effect hebben gesorteerd, kan de leerling weer op eigen kracht verder gaan, totdat de volgende impasse zich voordoet. Dan wordt weer hulp geboden, enzovoort, totdat de leerling de eindoplossing heeft gevonden.

In een aan de Vrije Universiteit uitgevoerd onderzoek is voor deze aanpak gekozen. Aansluitend op ideeën van Vygotskij (1964) en Krutetskij (1976) werd een test geconstrueerd voor de meting van het wiskundig generaliseringsvermogen. De test bestond uit opgaven met gefaseerde hulp. Uitgangspunt daarbij was dat leerlingen naast hun zelfstandig vermogen tot transfer beschikken over nog in ontwikkeling verkerende kennisstructuren, die alsnog tot transfer kunnen leiden, mits de leerlingen door een meer capabel iemand, die aanwijzingen over de voortgang kan verschaffen, op weg worden geholpen. Omdat het hierbij gaat om taken die nu nog niet zelfstandig verricht kunnen worden, maar in de toekomst wel, wordt gesproken van het leerpotentieel of zone van naaste ontwikkeling.

Ofschoon de opgaven tot nu toe uitsluitend voor toetsdoeleinden zijn gebruikt, wordt de mogelijkheid overwogen om dergelijke opgaven tevens voor instructie-doeleinden te construeren. In een dergelijke leersituatie wordt verwacht, dat de behoefte aan hulp per leerling verschillend zal zijn en gestadig zal afnemen naarmate de leerling uit zichzelf de handelingen, die door de hulpaanwijzingen worden gesuggereerd, zal gaan verrichten. De specificiteit van de geboden hulp neemt toe naarmate binnen een bepaalde oplossingsstap vaker hulp wordt gevraagd. Door de opgedane ervaring zal, naarmate het leerproces vordert, steeds minder specifieke hulp geboden behoeven te worden. De leerling zal zich de oplossingsstappen, die door de hulpaanwijzingen zijn voorgeschreven, steeds meer eigen maken (van 'other regulated' naar 'self regulated' gedrag, cf. Wertsch, 1984).

Eén van de belangrijkste problemen bij het bieden van hulp is de aansluiting van de inhoud daarvan bij de nog in staat van ontwikkeling verkerende kennisstructuren van de leerling. Andere knelpunten bij de procedure, zoals het te snel en onbedachtzaam vragen om hulp, de gewenste vormgeving en specificiteit van de hints en het bevorderen c.q. verzekeren van begrip (assimilatie) van de geboden hulp, zijn uitvoerig beschreven in De Leeuw, Beishuizen, Van Daalen, Meijer en Perrenet (1987).

3 *Het transfervraagstuk gezien vanuit de wiskunde-didactiek*

Binnen de wereld van de wiskunde-didactiek is men zich terdege bewust dat transfer niet vanzelf komt. Van Hiele (1985) geeft aan dat men bij transfer eigenlijk een wonder verwacht; men onderwijst iets en verwacht iets anders als onderwijsresultaat. Hij noemt als voorbeeld de veelgehoorde klacht van leraren natuurkunde en scheikunde dat de leerlingen de wiskunde in hun lessen onvoldoende kunnen toepassen. Dit ligt volgens hem voor de hand. Hij schrijft het ontbreken van transfer in deze gevallen niet toe aan systeemscheiding, maar aan het feit dat de verschillen tussen de wiskunde in de wiskundeles en de wiskunde die bij natuurkunde en scheikunde gebruikt wordt te groot zijn. Het gaat volgens hem bij natuurkunde en scheikunde om nieuwe vakken die opnieuw geleerd moeten worden. Afspraken tussen de betreffende leraren over tijdsplanning en gebruikte notaties zijn onvoldoende.

Ook in het aan de Vrije Universiteit uitgevoerde onderzoek 'Een transfertest voor wiskunde', waarbij transferproblemen met hulpaanwijzingen aan leerlingen werden voorgelegd (Perrenet, 1985) deed men de ervaring op dat de te overbruggen 'afstand' tussen het geleerde en de nieuwe onbekende contexten waarin de opgaven waren ingebed, al gauw te groot is. De oorspronkelijk bedachte opgaven bleken vaak met hulp nog te moeilijk.

3.1 *Transfertypen*

Er kunnen verschillende soorten transfer van kennis en vaardigheden worden onderscheiden. Wanneer eerder verworven kennis moet worden toegepast in een andere context,

wordt wel gesproken van *horizontale transfer* (cf. De Leeuw, 1979). De verworven kennis op zich zelf behoeft dan niet te worden gegeneraliseerd, alleen de toepassingscondities zullen gewijzigd moeten worden. Als uit een verworven kennisrepertoire ingewikkelder kennis moet worden opgebouwd wordt gesproken van *verticale transfer*, omdat er gegeneraliseerd moet worden naar een hoger niveau van complexiteit.

Binnen het eerder vermelde onderzoek 'Een transfertest voor wiskunde' wordt horizontale transfer nader onderverdeeld in horizontale transfer naar buiten (het kunnen toepassen van een bekend wiskundig principe in een nieuwe niet-wiskundige situatie) en horizontale transfer naar binnen (toepassing in een ander – op zich ook bekend – deel van de wiskunde dan waarbinnen het betreffende principe verworven werd). Bij verticale transfer (het abstraheren, generaliseren binnen hetzelfde wiskundige gebied) wordt toepassing op een hoger niveau gevraagd.

Ter illustratie volgt hier bij elk transfertype een voorbeeld uit de transfertest, bedoeld voor eind derde klassers VWO (de opgaven worden hier vermeld zonder de bijbehorende hulpaanwijzingen).

1. Horizontale transfer naar buiten:

Zie Figuur 1.

Bekend in de opgave is het interpreteren en aflezen van een grafiek; de grafiek beschrijft echter een gebeurtenis buiten de wiskunde, die in woorden weergegeven moet worden.

2. Horizontale transfer naar binnen

De omtrek van een cirkel is gelijk aan 2π maal de straal (met π ongeveer 3.14). Maak een grafiek, waaruit je de omtrek van een cirkel kunt aflezen, als je de straal kent.

Aanwijzing: Zet de straal uit langs de horizontale as en let op: een negatieve straal bestaat niet!

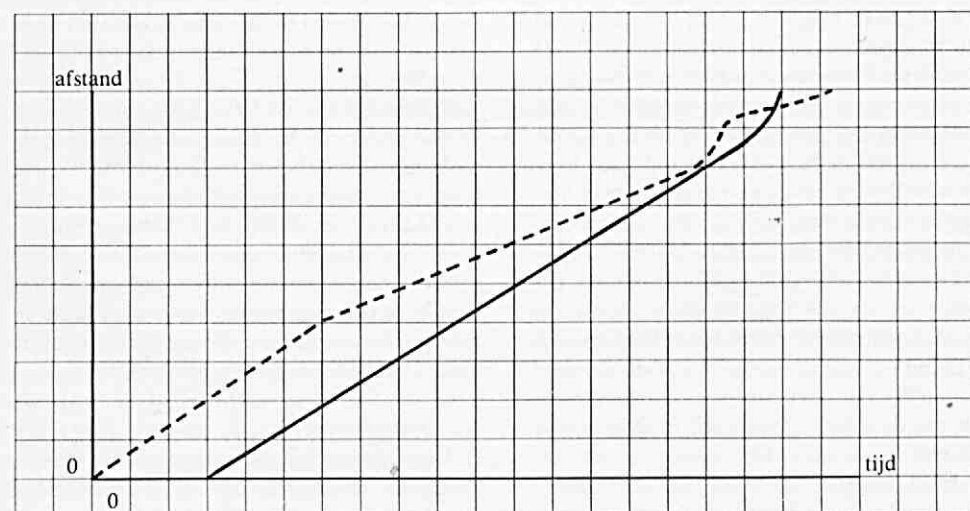
De cirkel is behandeld, evenals het tekenen van een grafiek van een eerstegraads functie; nieuw is de meetkundige context bij een dergelijke grafiek.

3. Verticale transfer

Voor welke p is de grafiek van $f: x \rightarrow px^{p+1} + 6x^p + 7$ een parabool?

Arie heeft een zus die goed kan zwemmen. Ze trainen samen in een zwembad. Zij beweert, dat ze over 5 baantjes hem 1 baan voorsprong kan geven. Dat wil Arie wel eens zien en ze houden een wedstrijd. Arie begint en als hij bij het eerste keerpunt is, start zij pas. Na 5 banen is de finish.

Hieronder zie je een grafiek van hun wedstrijd. Geef een verslag van het laatste deel van de wedstrijd; begin bij het laatste keerpunt.



Figuur 1 Een opgave van horizontale transfer buiten de wiskunde

Het omgaan met een parameter p is bekend, maar niet zoals hier: voorkomend in een exponent.

3.2 *Het bevorderen van transfer*

Beide soorten horizontale transfer zijn te herkennen in het advies van Freudenthal (1973): Wil men wiskunde kunnen toepassen, dan moeten de onderwerpen gerelateerd geleerd worden, dat wil zeggen met relaties tussen de verschillende gebieden binnen de wiskunde en relaties tussen de wiskunde en gebieden daarbuiten. Het kunnen toepassen is volgens hem vooral belangrijk voor die groep van leerlingen (de meerderheid), die in de wiskunde niet verder zal studeren. Volgens hem moet het wiskunde bedrijven in (mathematiseren van) reële situaties voorafgaan aan het mathematiseren binnen de wiskunde zelf. Hij wijst tevens op het belang van de zogenaamde veelsporige benadering van begrippen: hetzelfde begrip moet in uiteenlopende situaties aan de orde komen.

Eerder werd gewezen op het risico van een veelsporige benadering – een te grote variatie in de voorbeelden – voor leerlingen met een sterke behoefte aan pre-structurering. Lagerwerf (1982) ziet bij het leren door voorbeelden van begrippen en regels vooral het gevaar van te sterke specialisatie: de toepassingscondities van wiskundige kennis worden beperkt tot de context waarin de kennis is verworven. Als nadeel van deze onderwijsmethode noemt hij dat overbodige kenmerken van de gegeven voorbeelden (ruis) ten onrechte als essentieel voor het te leren begrip of de te leren regel gezien kunnen worden. Om de kans op deze storingen te verkleinen moeten volgens hem: 1. eenvoudige voorbeelden genomen worden met niet te veel storende elementen, 2. niet te weinig voorbeelden gegeven worden, 3. veel variatie in de voorbeelden zijn aangebracht en 4. de bijna-voorbeelden nauw aansluiten bij de voorbeelden.

Diverse auteurs stellen ten slotte dat het toepassen van wiskunde in reële situaties (horizontale transfer naar buiten), een flexibele omgang met verschillend geaarde (externe) probleemrepresentaties vereist. Zo kan een functioneel verband weergegeven worden door middel van een verbale situatiebeschrijving, een tabel, een formule of een grafiek. De probleemoplosser moet vaardig zijn in het ver-

talen van de ene representatie naar de andere (Van Streun, 1986b).

3.3 *Heuristische aanwijzingen*

Een mogelijkheid om de wendbaarheid van kennis van leerlingen te vergroten is het aanleren van een heuristisch handelingsrepertoire of het uitbreiden daarvan. Hierop kan dan worden teruggevallen als er geen algoritmen bekend zijn voor de oplossing van een voorliggend probleem. Zeer bekend binnen de wiskunde-didactiek is het door Polya ontwikkelde systeem van heuristische strategieën voor het oplossen van wiskundige problemen. Polya onderscheidt vier fasen in het oplossingsproces en laat de probleemoplosser zichzelf voortdurend vragen stellen om het proces te stimuleren (Polya, 1957):

- het begrijpen van het probleem (bv. wat is er onbekend?; wat wordt er gevraagd?)
- het opstellen van een plan (bv. ken je een probleem, dat erop lijkt?; kun je een deelprobleem oplossen?)
- de uitvoering van het plan (bv. is elke stap correct uitgevoerd?)
- de terugblik (bv. kan het ook op een andere manier?; is de gehanteerde methode elders te gebruiken?).

Van Streun (1986a) hanteert in zijn project 'Heuristisch wiskunde-onderwijs' een vergelijkbare verzameling regels voor systematische probleemaanpak. Naast algemene regels als 'probeer het probleem op te splitsen in deelproblemen' zien we bij hem ook vakinhoudelijke aanwijzingen als 'neem een getallenvoorbeeld' en 'voer letter-variabelen in $x, y, d, \dots$ ' en hints bij de specifieke opgaven. Hij hoopt aan te tonen, dat een wiskundemethode met expliciete aandacht voor dergelijke aanwijzingen de waarschijnlijkheid van het optreden van transfer bij leerlingen vergroot.

Van algemene cursussen probleemoplossen is gebleken, dat ze weinig effect sorteren bij opgaven op een specifiek vakgebied (Teare, 1980). Ook met het onderwijzen van binnen de wiskunde ontwikkelde heuristische systemen als die van Polya heeft men echter tot nu toe weinig succes gehad. Begles' samenvatting van de resultaten van een groot aantal empirische studies over de effecten van het aanleren van oplossingsstrategieën voor wiskundeproblemen is nogal ontmoedigend (Begles, 1979): 'De studies hebben geen duidelijke richtlijnen opgeleverd voor het wiskunde-onderwijs. Er

zijn voldoende aanwijzingen, dat probleemoplossingsstrategieën zo vaak probleem- en leerlingsspecifiek zijn, dat de hoop strategieën te vinden die aan alle leerlingen onderwezen kunnen worden simplistisch is.'

Volgens Schoenfeld (1985) heeft men de complexiteit en subtiliteit van heuristische regels onderschat: veel heuristische 'labels' staan voor een aantal gedetailleerde strategieën; strategieën bestaan uit substrategieën, elk met eigen toepassingscondities; een goede kennis van het wiskundedomein is onontbeerlijk. Hij wijt het falen van training in schema's als die van Polya mede aan het gegeven dat er bij het toepassen van heuristische regels ook sprake is van een transferprobleem: regels, die aan de hand van bepaalde problemen worden geleerd, moeten bij andere problemen worden toegepast. Bij training van studenten in enkele uitgewerkte heuristische strategieën vond hij, dat alleen training door middel van problemen onvoldoende is. Nauwkeurige beschrijving van substrategieën met oefening in het toepassen – bij andersgeaarde problemen dan waarbij de strategieën waren aangeleerd – met bovendien discussie over de condities waaronder bepaalde substrategieën geschikt lijken, leverde verbetering bij het oplossen van nieuwe problemen.

4 *Wiskunde in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs*

4.1 *Verschillen tussen leerboeken en verandering van het leerplan*

Nederland kent drie leergangen voor de wiskunde voor HAVO en VWO die al een aantal jaren ieder ongeveer 30 procent van de markt bestrijken, te weten *Sigma*, *Getal en Ruimte* en *Moderne Wiskunde*. Hoewel ze in grote lijnen dezelfde leerstof behandelen, zoals voorgescreven door het leerplan, verschillen ze aanzienlijk in de manier waarop dat gebeurt. Uit het feit dat alle drie zich handhaven, kan worden afgeleid, dat ze alle drie hun verdiensten hebben.

Krammer analyseerde de boeken voor de brugklas en de tweede klas en richtte zich daarbij in eerste instantie op de vraagstukken (Krammer, 1984). Hij constateerde dat *Moderne Wiskunde* (derde editie) vooral een vraagstukkenboek is (gerekend naar totaal benodigde oplostijd) en dat die vraagstukken

meer dan bij *Getal en Ruimte* en *Sigma* van een laag cognitief niveau zijn (routine) en bovendien vaker een praktische inkleding hebben. *Getal en Ruimte* biedt ook veel vraagstukken, meer dan *Sigma*; praktische inkleding treft men er minder aan dan bij *Moderne Wiskunde*; *Getal en Ruimte* heeft meer dan de andere methodes vraagstukken die nieuwe theorie introduceren. *Sigma* tenslotte biedt het kleinste aantal vraagstukken en praktische inkleding blijkt afwezig.

Op grond van gesprekken met auteurs en kwalitatieve beschouwing completeert Krammer het beeld als volgt: *Sigma* biedt de leerstof het meest gestructureerd aan en is van de drie het meest geschikt als naslagwerk; voor zelfwerkzaamheid is het echter het minst geschikt. In *Getal en Ruimte* wordt de meeste aandacht besteed aan het ophalen van voorkennis, het differentiëren naar leerlingniveau, het diagnosticeren en remediëren; *Getal en Ruimte* is het minst geschikt voor discussie over de leerstof. *Moderne Wiskunde* ten slotte is het meest geschikt voor discussie.

Het wiskunde-onderwijs is niet statisch; door de jaren heen veranderen de didactische inzichten en de visie op hoe het onderwijs eruit zou moeten zien. Na een periode van formalisering met nadruk op verzamelingen en relaties hecht men nu meer belang aan het geven van wiskunde met gebruik van reële contexten, waarbij aan het begrip functie een meer centrale positie wordt toegekend. Nieuwe leerstofpakketten werden ontwikkeld door het (voormalige) IOWO (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs) te Utrecht. Dit werk werd voortgezet door de SLO (Stichting voor Leerplan Ontwikkeling) te Enschede en het OW&OC (Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs-Computercentrum) in Utrecht.

Hoewel voor andere klassen en voor andere schooltypen ook hervormingen worden nagestreefd, heeft alleen in de bovenbouw van het VWO de leerplanherziening werkelijk plaatsgevonden. In plaats van de gebruikelijke vakken *Wiskunde I* (de basisleerstof voor de α -richting in het VWO) en *Wiskunde II* (de leerstof die vereist is voor toelating tot een technische of exacte universitaire studie) zijn *Wiskunde A* en *B* gekomen.

Met betrekking tot het onderwerp transfer is vooral *Wiskunde A* relevant. Bij dit onder-

deel ligt de nadruk op wiskunde in toepassingssituaties; het is de soort wiskunde die goed zou moeten aansluiten bij de rol die wiskunde speelt in de economie en de sociale wetenschappen. De aard van de problemen waar het hier om gaat is complexer dan die van transferopgaven, waar eerder voorbeelden van werden gegeven (zie paragraaf 3.1). In de terminologie van De Lange (1987) moet er zowel horizontaal gemathematiseerd worden (het probleem van buiten de wiskunde moet ingepast worden in een wiskundig model) als verticaal (binnen een gekozen model moet het probleem wiskundig bewerkt worden, waarbij generalisatie een rol kan spelen en waarna zonodig een ander model moet worden geprobeerd). Aspecten van alle drie eerder genoemde typen van transfer zijn bij De Lange's beschrijving van dit mathematiseringsproces te herkennen.

Na deze verandering in de bovenbouw van het VWO zal een soortgelijke ingreep in de leerstof voor de HAVO-bovenbouw volgen. Dergelijke ingrepen in het leerplan worden niet door elke leraar en elke auteur met evenveel enthousiasme ontvangen. Sommige leraren hebben er moeite mee buiten de grenzen van de wiskundige wereld te treden en te werken met vraagstukken zonder éénduidig antwoord.

Deze veranderingen in het leerplan hebben vanzelfsprekend gevolgen voor de inhoud van de genoemde drie leergangen. De nieuwste (vierde) editie van *Moderne Wiskunde* lijkt het snelst aan te sluiten bij de veranderingen. In het boek voor 4 VWO uit de serie *Moderne Wiskunde* is de oriëntatie op Wiskunde A en B in de andere leerstof geïntegreerd, terwijl bij Getal en Ruimte en Sigma gewerkt wordt met apart aanvullend materiaal.

Binnen het eerder genoemde project aan de Vrije Universiteit werd de vierde editie van *Moderne Wiskunde* voor de onderbouw vergeleken met Getal en Ruimte en Sigma. Geconstateerd werd, dat in *Moderne Wiskunde* de verschillende leerstofonderdelen het meest geïntegreerd worden behandeld (met de meeste onderlinge samenhang en afwisseling). Sigma presenteert de onderdelen het meest gescheiden. Getal en Ruimte gebruikt de meest abstracte notaties, *Moderne Wiskunde* de minst abstracte.

In de boeken is geen aandacht voor aanpak van niet-standaard problemen. Wel bleek, dat

de methoden geordend konden worden op de dimensie algoritmisch-heuristisch. Deze beide termen worden hier gebruikt zoals bij De Leeuw (1979): een aanwijzing of oplossingsmethode wordt algoritmisch genoemd indien het bedoelde cognitief proces volledig is vastgelegd; heuristisch indien dat niet het geval is, door onvolledigheid of afwezigheid van specificatie. Als maten werden genomen 1. in hoeverre oplossingsmethoden door herhaling geoefend worden, dat wil zeggen in hoeverre rijtjes opgaven voorkomen van hetzelfde type en 2. in hoeverre uitgewerkte voorbeelden volledig zijn en de oplossingswijze wordt voorgeschreven. Voor beide kenmerken geldt: hoe sterker aanwezig, des te meer algoritmisch en des te minder heuristisch is het leerboek. Sigma bleek zo het meest algoritmisch van karakter en *Moderne Wiskunde* het meest heuristisch; Getal en Ruimte nam een tussenpositie in. De eerder genoemde conclusies van Krammer passen goed bij deze ordening.

Op grond van genoemde verschillen kan worden verondersteld dat leerlingen die *Moderne Wiskunde* gebruiken aan het eind van de onderbouw het beste in staat zullen zijn het geleerde toe te passen in ongebruikelijke contexten, zowel binnen als buiten de wiskunde (horizontale transfer naar binnen en naar buiten). Bij leerlingen die Getal en Ruimte gebruiken kan eerder verticale transfer worden verwacht, aangezien zij beschikken over een instrumentarium dat abstractie mogelijk maakt. Er moet echter wel rekening worden gehouden met het feit, dat voor het optreden van transfer beheersing van de leerstof 'sec', dat wil zeggen: het kunnen reproduceren van de onderwezen leerstof, noodzakelijk is. Deze beheersing zal het beste zijn bij leerlingen die Sigma gebruiken: in deze leergang is de aandacht in de onderbouw het meest gericht op wat door het leerplan wordt voorgeschreven en er worden weinig extra's behandeld.

Omdat verwacht werd dat leerlingen met een sterke behoefte aan pre-structurering van de leerstof meer baat hebben bij algoritmische instructies (zie par. 2.3), geldt tevens de hypothese dat de invloed van deze behoefte op de transfertest-prestaties het zwakst zal zijn bij de methode Sigma en het sterkst bij de methode *Moderne Wiskunde*. De behoefte aan structurering vooraf werd in het genoemde project van de Vrije Universiteit gemeten door de per-

soonskenmerken negatieve faalangst en, hoewel de predicties op dit punt minder éénduidig zijn af te leiden, veld(on)afhankelijkheid (zie De Leeuw, 1979).

Natuurlijk moet bij alle genoemde leerboekkenmerken niet vergeten worden dat naast het boek de leraar grote invloed heeft op wat er in de klas gebeurt, hoe er wiskunde geleerd wordt. Deze kan bijvoorbeeld stukken overslaan en op eigen wijze het boek vervangen.

4.2 *Het gebruik van leerboeken en didactische werkvormen*

In het kader van het project 'Leren probleemoplossen in de wiskunde' (Riemersma & Meijer, 1982) dat aan de Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek (SCO) te Amsterdam werd uitgevoerd, werd in 1982 een enquête verstuurd naar de wiskunde-secties van 293 scholen voor Voortgezet Onderwijs. Het ging voornamelijk om scholengemeenschappen voor MAVO, HAVO en VWO. De respons bedroeg 37% (N = 109).

Ten aanzien van het gebruik van leergangen bleek dat Moderne Wiskunde het meest frequent werd gehanteerd (N = 42), gevolgd door Getal en Ruimte (N = 31) en Sigma (N = 22). Overige leergangen werden zelden gebruikt (N = 14). Op verschillende scholen werd tevens aanvullend materiaal gebruikt, bijvoorbeeld in de vorm van door docenten zelf vervaardigd lesmateriaal. Opvallend was het relatief geringe gebruik van door het IOWO vervaardigd leermateriaal; slechts op twee scholen werd het gebruik hiervan gemeld.

Aan de respondenten was gevraagd vraagstukken in de door hen gehanteerde leergangen aan te geven, die problematisch zouden zijn voor leerlingen uit het tweede leerjaar. Ofschoon er weinig overlap was tussen de door de respondenten aangegeven opgaven, kan toch geconcludeerd worden, dat het voornamelijk om vraagstukken ging die transfer van de verworven leerstof vereisten. Voorbeelden zijn: de successieve toepassing van de stelling van Pythagoras om de lengte van de lichaamsdiagonaal van een balk te bepalen, oplossen van stelsels vergelijkingen met behulp van grafieken en verborgen vergelijkingen (redactie-opgaven). De leerlingen in de tweede klas zijn wel bekend met de stelling van Pythagoras in de vlakke meetkunde, maar toepassing in een driedimensionale ruimte is

nieuw voor ze. Stelsels vergelijkingen worden normaal gesproken opgelost met behulp van substitutie en eliminatie van onbekenden. Grafische ondersteuning van oplossingsmethoden wordt zelden expliciet onderwezen. Bij redactie-opgaven moet de onderliggende mathematische structuur uit een in natuurlijke taal gestelde tekst worden afgeleid, terwijl de standaard-vergelijking aangeboden wordt in een wiskundige notatie.

Tevens was de respondenten gevraagd wanneer zij welke onderwerpen uit de door hen gehanteerde leergangen voor de tweede klas behandelen. Uit de antwoorden bleek, dat de meeste leerkrachten de volgorde van de leerstof in het boek aanhielden. De inbreng van de docent beperkte zich voornamelijk tot het overslaan van hoofdstukken of het verstrekken van aanvullend materiaal bij bepaalde delen van de leerstof.

Schooltypen van verschillend niveau onderscheidden zich met name door een ander tempo van behandeling van de leerstof; in principe kwamen in het tweede leerjaar dezelfde onderwerpen aan de orde. Vanzelfsprekend zullen de verschillen in tempo uiteindelijk leiden tot verschillen in volume van de behandeling van de leerstof.

Van de didactische werkvormen bleek klassikale uitleg van de vakinhoud, wellicht noodgedwongen, nog het meest toegepast te worden. De meeste leerkrachten zeiden hieraan zo'n 50 à 75% van de totale lestijd te besteden. Iets minder tijd werd besteed aan het onderwijsleergesprek, groepswork en zelfstudie. Aan individuele uitleg werd slechts door enkele leerkrachten een kwart van de lestijd besteed; de meerderheid der leraren besteedde er minder tijd aan. De beperkingen van het klassikale onderwijs bleken uit de relatief geringe tijdsbesteding aan het onderwijsleergesprek, terwijl een aanzienlijk deel der respondenten wel een voorkeur uitsprak voor deze werkvorm. Dat gold tevens voor groepswork.

De beperkingen van de huidige schoolsituatie dringen zich op. Grote aantallen leerlingen per klas dwingen de leerkracht tot het geven van prioriteit aan klassikale uitleg, terwijl aan mogelijk transfer-bevorderende werkvormen als het onderwijsleergesprek, groepswork en individuele uitleg te weinig tijd besteed kan worden.

5 Een didactiek voor het leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs

Uit de leergang-analyses van het transfertest-project van de Vrije Universiteit bleek dat in de schoolboeken geen aandacht wordt besteed aan de aanpak van niet-standaard opgaven en dus niet aan transfer van verworven kennis. Als er al aandacht wordt besteed aan transfer, zou dit door de leraar moeten gebeuren. Er zou in het wiskunde-onderwijs ruime plaats moeten worden ingeruimd voor leraarsactiviteiten die op transfer zijn gericht.

Voor het oplossen van een wiskunde-probleem is transfer van eerder verworven vak-kennis een voorwaarde. Het problematische van dergelijke opgaven schuilt immers in een discrepantie tussen de kennis die nodig is om een oplossing te kunnen geven, en de kennis van de leerling. Een didactiek die gericht is op het leren oplossen van wiskunde-problemen, kan belangrijk bijdragen aan het bevorderen van het transfervermogen van leerlingen. In een door de SCO uitgevoerd project (o.a. Riemersma & Meijer, 1983) wordt een op een dergelijke didactiek gestoeld onderwijsleer-programma in de praktijk beproefd.

In deze didactiek staat de verwerving van een repertoire van probleemoplossingstechnieken centraal. Voor een deel betreft het hier onderwijs in zogenaamde meta-cognitieve vaardigheden, opdat over het *proces* van probleemoplossen op zich zelf kan worden nagedacht. Op deze wijze kan het oplossings-sche-ma van de context waarin dit is aangeleerd worden losgemaakt, zodat overdracht naar een andere context mogelijk is. Daarnaast is de koppeling van kennisverwerving en toepas-sing van die kennis van belang. Wiskundige kennisverwerving dient de probleemoplos-singsvaardigheid te bevorderen. Verwerving en toepassing dienen in elkaars verlengde te liggen. Kennisverwerving die gericht is op toe-komstig gebruik zal de leerling motiveren om actief in het verwervingsproces te participe-ren. Gebaseerd op bevindingen en ideeën uit het SCO-project 'Leren probleemoplossen in de wiskunde', wordt een didactiek voorgesteld die zal worden toegelicht aan de hand van de volgende aspecten:

- a) de vormgeving van de leerstof;
- b) de rol van de leraar;
- c) het onderwijzen van een probleemaan-pak.

ad a. De vormgeving van de leerstof

Er wordt uitgegaan van de leerstof zoals die op het programma (in het leerplan) staat, zodat tenminste aan de vigerende examen-eisen kan worden voldaan. De daarin genoemde onder-werpen kunnen echter elk op diverse manieren aan de leerlingen worden gepresenteerd. Een gebruikelijke presentatie is uitleg van begrip-pen gevolgd door een reeks van opgaven die veelal weinig gevarieerd zijn in vormgeving. Sommige leergangen doorbreken dit stramen (onder andere de nieuwste editie van de serie *Moderne Wiskunde*, de Wageningse Methode en door het IOWO ontwikkeld leermate-riaal).

Voor het bevorderen van transfer dient steeds de te behandelen leerstof in relatie ge-bracht te worden met de leerstof die al eerder werd behandeld en leerstof die nog behandeld gaat worden. Met andere woorden, de leersto-fonderwerpen dienen expliciet onderling aan elkaar gerelateerd te worden zodat *integratie* mogelijk wordt. De leerling kan dan ook dui-delijk worden gemaakt dat hij niet alleen voor het heden werkt maar ook voor de toekomst; voorts dat het niet gaat om geïsoleerde stukjes kennis maar om elementen uit een groter ge-heel, een geheel waarmee een diversiteit aan problemen te lijf kan worden gegaan.

Het is echter de vraag of structurering van leerstof in een schriftelijke methode de trans-fervermogens van leerlingen merkbaar beïn-vloedt. Ondanks het feit dat *Moderne Wis-kunde* de leerstof sterker geïntegreerd behandelt dan de methoden *Sigma* en *Getal en Ruimte* (zie par. 4.1), werden in het transfe-rtest-onderzoek dat werd uitgevoerd aan de Vrije Universiteit geen verschillende effecten van leergangen gevonden. Ofschoon de Mo-derne Wiskunde-leerlingen betere prestaties vertoonden op de transfertest, was dit toe te schrijven aan hun gemiddeld hogere niveau van leerstofbeheersing. Het niveau van be-heersing bleek bovendien minder te variëren tussen de klassen dan tussen de scholen, waar de diverse leergangen werden gebruikt. Ten eerste betekent dit dat niet zozeer de leergan-gen, maar de scholen het geconstateerde ver-schil in leerstofbeheersing van leerlingen kunnen hebben bepaald. Ten tweede duidt dit resultaat op een relatief geringe invloed van de leraar ten opzichte van de scholen, voor zover de invloed van de leraar weerspiegeld wordt door de verschillen tussen klassen. De variatie

in aanbidding en structurering van de leerstof tussen de drie leergangen hing in elk geval dus niet samen met verschillen in transfervermogen tussen leerlingen. Tevens was er geen sprake van significante interactie van de aard van de leermethode met de pre-structureringsbehoefte (geoperationaliseerd als negatieve faalangst) van leerlingen.

ad b. De rol van de leraar

De rol van de leraar in de hier voorgestelde didactiek is die van leider en begeleider. Op de eerste plaats is de leerkracht communicatie-expert in die zin dat hij in staat is interactie en communicatie tussen leerlingen te stimuleren gericht op bepaalde taken. Concreet gaat het hier om het stellen van diverse soorten vragen, die de leerlingen kunnen aanzetten tot reflectie, te weten zogenaamde kennis-, begrips-, toepassings-, analyse-, synthese- en evaluatievragen (Gall, Dunning & Weathersby, 1977), en het beantwoorden van soortgelijke vragen van de leerlingen. Een andere manier om leerlingen over hun denkprocessen te laten reflecteren wordt door Barnes (1979) gesuggereerd. Hij stelt dat leerlingen meer inzicht kunnen krijgen als (i) ze eisen aan een taak hardop herhalen, (ii) verwoorden wat ze met gegevens doen en met welk doel en (iii) als ze zoiets herhaaldelijk doen in reactie op vragen van iemand anders. In dit verband is het belangrijk dat de leraar de leerlingen ertoe weet te brengen moeilijkheden met de leerstof kenbaar te maken.

Een andere belangrijke rol is die van probleemoplosser; de leraar kan door daadwerkelijk probleemoplossend te werk te gaan de leerling een voorbeeld geven. Daarmee wordt een belangrijke leermogelijkheid voor leerlingen geschapen (imitatieleren). Deze voorbeeldfunctie van de leraar heeft tegelijk de mogelijkheid de interessante en bevredigende aspecten van de wiskunde aan de leerlingen te demonstreren. De leerlingen kunnen hier ook een andere rol spelen door samen met de leraar probleemoplossend bezig te zijn.

ad c. Het onderwijzen van een probleemantpak

De voorgestelde didactiek is er op gericht kennis zo wendbaar mogelijk te maken. Daartoe dient de leerling te beschikken over begrippen en technieken die hem de mogelijkheid schenken het eigen oplossingsproces te sturen.

Aanvankelijk kan sterke sturing plaatsvinden door de leraar, die door gerichte vragen, hints en dergelijke, de leerling langs bepaalde oplossingsprocessen leidt; deze sturing moet geleidelijk door de leerling zelf worden overgenomen. Bij nieuwe problemen en leerstof zal de sturing van de leraar aanvankelijk sterker zijn; bij meer vertrouwdheid daarmee zullen de leerlingen zelfstandiger moeten handelen. Door een geleidelijk opklimmende bekwaamheid in zelfstandig handelen kan externe sturing uiteindelijk achterwege blijven (cf. Lomp-scher, 1972; zie ook het begrip 'guided discovery' in par. 2.3).

De leraar zal expliciet aandacht moeten besteden aan algemene oplossingsstrategieën, waarmee een scala van wiskundige problemen kan worden aangepakt. Die oplossingsstrategieën zouden soortgelijk aan die van Polya kunnen zijn. In paragraaf 3.3 werd echter al opgemerkt, dat het onderwijzen van heuristische regels c.q. globale aanwijzingen om problemen aan te kunnen pakken, weinig succes heeft gehad. Uit onderzoek van onder andere Mettes & Pilot (1981) en De Jong (1986) is gebleken dat heuristische zelden tot succes leiden als zij niet expliciet aan de vakinhoud worden gekoppeld.

Er moet uitdrukkelijk een verbinding met de leerstof worden gelegd om niet te vervallen in algemene 'inhoudsloze' voorschriften en aanwijzingen die niet met de vakkennis verbonden kunnen worden. Uitgangspunt hier zou moeten zijn dat min of meer algemene regels in het onderwijs voortdurend worden verwoord in termen van de vakkennis die aan de orde is. Omgekeerd kunnen vakinhoudelijke regels worden geformuleerd in termen van de plaats die zij binnen het oplossingsproces innemen. Het gaat eigenlijk om generalisatie en specialisatie van kennis en kennisregels, het heen en weer gaan van algemeen naar bijzonder en bijzonder naar algemeen.

Voor het leren oplossen van wiskunde-opgaven, waarin een beroep wordt gedaan op transfer van eerder verworven kennis, is de ontwikkeling van de volgende vaardigheden van belang:

- Leren lezen van de opgave of leren begrijpen van de voorgelegde probleemsituatie. Het gaat er om dat de gebruikte begrippen en symbolen tenminste begrepen worden.
- Analyseren van een probleemsituatie. Hier-

bij gaat het er om dat de kern van de gegevens, de vraagstelling en de gestelde condities geïdentificeerd worden. De bedoeling hiervan is een eigen 'rijke' probleemrepresentatie te vormen, een beeld van het probleem te scheppen om aanknopingspunten voor een oplossing te krijgen.

- Leren gebruiken van heuristieken. Hierbij valt te denken aan algemene heuristische strategieën als vanuit het gevraagde redeneren, middel-doel analyse, en het opdelen van het probleem in subproblemen. Ook valt te denken aan meer lokale tactieken als notatie, plaatsing- en vereenvoudigingsheuristiek (bijvoorbeeld het tijdelijk laten vallen van een conditie), schatten, ontwikkelen van een hulpprobleem en dergelijke.
- Het eigen oplossingsproces kunnen onderbreken en de stand van zaken opmaken (reflecteren).
- Het oplossingsproces leren evalueren, dat wil zeggen nagaan of het resultaat juist is, alternatieve oplossingen bedenken, onnodige stappen kunnen aanwijzen, bedenken welke problemen op dezelfde of een soortgelijke manier opgelost kunnen worden.

Volledige uitvoering van deze didactiek zal niet eenvoudig zijn. De situatie op school en in de klas leggen voorwaarden op aan de totstandkoming van een dergelijke wijze van onderwijs geven. De klassieke klassituatie wordt gekenmerkt door klassikaal onderricht, met door de leraar bepaalde vraag en antwoordinteractie. Om werkvormen die mogelijk transfer-bevorderend zijn gestalte te geven, zou deze situatie geleidelijk doorbroken moeten worden door de hantering van het onderwijsleergesprek en het stellen van zogenaamde denkvragen. Verwoording van oplossingsprocessen tussen de leerlingen onderling of tussen leerling(en) en leraar kan ertoe leiden dat de leerling een beter begrip ontwikkelt. Daartoe zouden leerlingen actief moeten participeren (alternatieve oplossingen naar voren brengen, actief vragen stellen, informatie uitwisselen met medeleerlingen en met de leraar) in het onderwijsleerproces.

Een belangrijk probleem bij de invoering van een dergelijke didactiek is de hoeveelheid aandacht die de leraar aan elke individuele leerling kan besteden. Aansluiting van nieuwe leerstof bij reeds verworven vakkennis is mede afhankelijk van de mogelijkheden voor leer-

lingen om eigen intuïtieve noties en oplossingsstrategieën in te zetten. Het zou daarom ideaal zijn als de leerkracht hulp kan bieden die bij dergelijke ideeën van individuele leerlingen aansluit. Gezien de randvoorwaarden waaronder de leerkracht op dit moment opereert (klasse-grootte en leerstof-volume) is dat echter niet realiseerbaar.

6 Conclusies

Op grond van theorie en bevindingen uit de cognitieve psychologie is het aannemelijk dat overdracht van verworven kennis naar een nieuwe situatie (transfer) gemakkelijker is naarmate er meer gelijkenis bestaat tussen de oefensituatie en de toepassingssituatie. Een probleem is echter dat zeer sterke gelijkenis zal leiden tot beperkte wendbaarheid van kennis en een geringe mogelijkheid tot generalisatie van het geleerde.

Er is sprake van een spanning tussen twee complementaire onderwijsstrategieën die transfer kunnen bevorderen. Enerzijds het leren door voorbeelden (van specifiek naar algemeen), anderzijds het introduceren van algemene begrippen, voorafgaande aan het geven van voorbeelden (van algemeen naar specifiek). Op grond van deze twee principes werd verondersteld dat leergangen voor de wiskunde die van elkaar verschillen qua ordening en structuur in de presentatie van de leerstof, verschillende effecten zouden hebben op de transfervermogens van leerlingen. De resultaten van het genoemde aan de Vrije Universiteit uitgevoerde transfertest-onderzoek bevestigden deze hypothese echter niet. Tevens bleek het effect van de aard van een leer methode niet op de verwachte wijze af te hangen van de behoefte aan pre-structurering (in het onderzoek gemeten met een test voor negatieve faalangst en veld(on)afhankelijkheid) van leerlingen.

Vanuit de didactiek van de wiskunde wordt gesteld dat leerstof geïntegreerd moet worden gepresenteerd en dat de leerstof moet worden gekoppeld aan reële probleemsituaties, zodat de processen van kennisverwerving en toepassing gekoppeld kunnen worden. Voor zover deze aanpak door leergangen wordt ondersteund, zijn in het transfertest-onderzoek geen effecten op transfervermogens van leerlingen gevonden. Voorts kan getwijfeld worden aan

de zin van het onderwijzen van een heuristisch kennisrepertoire voor een algemene aanpak van wiskundige problemen als deze heuristieken niet expliciet aan de vakinhoud en de aard van de wiskundige problemen worden gekoppeld. Het uitblijven van verschillen in effect van de lestaken op het transfervermogen van leerlingen in het genoemde project wijst op een geringe invloed van schriftelijk studie-materiaal. Blijkbaar zijn meer en krachtiger maatregelen nodig om de transfervermogens van leerlingen te bevorderen.

In de voorgaande paragraaf is gepleit voor een meeromvattende onderwijsstrategie, waarin mogelijk transfer-bevorderende maatregelen (ten aanzien van didactische werkvormen, structuur van de leerstof en de rol van de leerkracht) zijn geïntegreerd. Deze aanpak zal op haar effecten worden getoetst in het eerder genoemde project 'Leren probleemoplossen in de wiskunde', dat aan de SCO wordt uitgevoerd.

7 Discussie

De realistische benadering in de wiskunde-didactiek (zie De Lange, 1987) lijkt vanwege de veronderstelde positieve effecten, wat betreft de toepassingsgerichtheid van de onderwezen leerstof, geschikt voor het bevorderen van transfer bij leerlingen. Door de introductie van aan de leefwereld van de leerlingen ontleende probleemsituaties zou ook de motivatie worden verhoogd. Tevens zou beter aangesloten worden bij de buitenschoolse kennis en ervaring die leerlingen bezitten (zie ook Nelissen, 1987). Wel doet zich de vraag voor of deze benadering voor alle leerlingen geschikt is in verband met de betrekkelijke structuurloosheid van de leersituatie (Goffree, 1987). Immers, daar waar de nadruk sterk ligt op vertaling van situaties in een wiskundige representatie en minder op een algoritmische hantering van regels, kan dit voor bepaalde leerlingen nadelig werken (Clute, 1984).

Het effect van didactische methoden in het wiskundeonderwijs is zelden aan een empirische toets onderworpen. De bevindingen in het project 'Een transfertest voor wiskunde' geven aan, dat verschillende leergangen geen verschillende effecten hoeven op te leveren, zelfs als zij qua karakter nogal uiteenlopen. Het meten van effecten van leermethoden is

echter lastig vanwege de complexiteit van de mogelijke factoren die van invloed zijn op leerresultaten. Voordat een gevonden effect aan een leer methode kan worden toegeschreven moeten alternatieve verklaringen zijn uitgesloten. In dit verband willen we pleiten voor meer laboratorium-onderzoek waarin door wijzigingen in de diverse oorzakelijke factoren mogelijke effecten scherper traceerbaar zijn. Hierdoor zouden resultaten van veldonderzoek beter interpreteerbaar kunnen worden.

In de in paragraaf 5 voorgestelde didactiek wordt een ruime plaats toegekend aan activiteiten die op *reflectie* door leerlingen zijn gericht. Door te reflecteren op verrichte en te verrichten handelingen tijdens het oplossen van problemen leert de leerling van eigen ervaringen mits deze de beschikking heeft over de concepten om die ervaringen zinnig te plaatsen en mits er deskundige begeleiding plaatsvindt om te voorkomen dat er misconcepties ontstaan (Korthagen, 1982). Hierbij moet wel opgemerkt worden, dat reflecteren tijd kost en een omgeving nodig heeft die deze activiteit toelaat en bevordert. In veel huidige onderwijsleersituaties waarin sprake is van leerstof-overlading en examendruk – althans zo wordt dit door leerlingen en leraren ervaren – past een activiteit als reflectie niet. Veel leerlingen willen liever 'direct weten waar het om gaat' zonder zaken die als omwegen worden ervaren. Het is derhalve belangrijk, dat het gedrag van de leerlingen gestuurd wordt, zodat zij wel gaan reflecteren. Dit kan door zodanige eisen aan het werk te stellen, dat reflecteren daarvoor nodig is, bijvoorbeeld door niet alleen een uitkomst te verlangen, maar ook de overwegingen daarvoor en de wijze waarop deze verkregen werd (cf. Crombag, 1987). Freudenthal (1978, 1985) meent dat het werken in heterogene groepen reflectie bevordert, waarbij de leraar stimulerend moet optreden. Van 't Riet en Schoemaker (1980) pleiten in dit verband voor het klasgesprek als aanvulling op het groepswork. Treffers en Goffree (1985) verwachten veel van eigen produkties van leerlingen (bijvoorbeeld door leerlingen bedachte opgaven van verschillende graad van moeilijkheid). Nelissen (1987) heeft binnen het basis-onderwijs gunstige ervaringen met op reflectie gericht onderwijs opgedaan; het betrof een programma, dat zich over een reeks van jaren uitstrekte.

Onzes inziens zou reflectie bevorderd kun-

nen worden door in het wiskunde-onderwijs expliciet aandacht te besteden aan het oplossen van vakinhoudelijke problemen. Desnoods zou dit ten koste van de hoeveelheid behandelde leerstof kunnen gebeuren. Kennis van vakinhoud leidt niet tot transfer, als zij niet kan worden toegepast. Gezien de explosieve groei van encyclopedische kennis op allerlei gebieden is het de vraag of het niet beter is te beschikken over een kleinere hoeveelheid kennis, die sterk toepassingsgericht is. De toenemende vraag naar capaciteiten die vereist zijn voor het zelfstandig verwerven van kennis maakt adequate methoden van kennisverwerving belangrijker dan kennisverwerving op zich zelf.

Literatuur

- Ausubel, D. P., *Learning by discovery: Rationale and mystique*. Urbana University of Illinois, 1961.
- Barnes, D., *From communication to curriculum*. Harmondsworth: Penquin Books Ltd., 1979.
- Begles, E. G., *Critical variables in mathematics education*. Washington D.C.: Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics, 1979.
- Clute, P. S., Mathematics anxiety, instructional method and achievement in a survey course in college mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1984, 15, 50-58.
- Crombag, H. F. M., Blending behavioristic and cognitive approaches to the study of education. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch*, 1987, 12, 17-22.
- Davydow, V. V., *Vidy obobshcheniya v obuchenii (Forms of generalization in instruction)*. Moskou: Pedagogika, 1972.
- Ellis, H., *The transfer of learning*. New York: Mac-Millan, 1965.
- Freudenthal, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.
- Freudenthal, H., *Weeding and sowing, preface to a science of mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1978.
- Freudenthal, H., Logica. *Nieuwe Wiskrant*, 1985, 5, 3-10.
- Gall, M., B. Dunning & R. Weathersby, *Minicursus denkvragen stellen* (oorspr. Minicourse 9: Higher Cognitive Questioning). Groningen: Wolters Noordhoff, 1971.
- Gagné, R. M., Learning hierarchies. *Educational Psychologist*, 1968, 6, 1, 1-9.
- Goffree, F., Ontwerpen voor rekenen. *Bulletin Le-ren van Volwassenen*, 1986, 17, 33-64.
- Goffree, F., *Rekenen, realiteit en rationaliteit. Een terreinverkenning en plaatsbepaling. Educatief ontwerpen ten behoeve van de volwasseneducatie in het bijzonder wat betreft de wiskunde*. Enschede: SLO, 1986.
- Goffree, F., Annemarie, de eredivisie, een heks en de NS. *Euclides*, 1987, 62, 97-103.
- Goldstein, I., The genetic graph: a representation for the evolution of procedural knowledge. In: D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems*. New York: Academic Press, 1982.
- Hiele, P. M. van, Op weg naar oplosmethoden met ruime toepasbaarheid. *Euclides*, 1985, 60, 10, 339-342.
- Jong, T. de, *Kennis en het oplossen van vakinhoudelijke problemen*. (dissertatie, T.U. Eindhoven), Helmond: Wibro, 1986.
- Korthagen, F. A. J., *Leren reflecteren als basis voor de lerarenopleiding*. Harlingen: SVO/Flevodruk, 1982.
- Krammer, H., *Leerboek en leraar* (dissertatie). Harlingen: Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs, 1984.
- Krutetskii, V. A., *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press, 1976.
- Lagerwerf, B., *Wiskunde-onderwijs nu*. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1982.
- Lange, J. de, Realistic math education. *Nieuwe Wiskrant*, 1987, 6, 2, 37-48.
- Leeuw, L. de, *Leren probleemoplossen*. Lisse: Swets & Zeitlinger, 1979.
- Leeuw, L. de, J. J. Beishuizen, H. van Daalen, J. Meijer & J. Chr. Perrenet, Het bieden van hulp tijdens computerbestuurd probleemoplossen; problemen en mogelijke oplossingen. *Pedagogische Studiën*, 1987, 64, 354-363.
- Lompscher, J., *Zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten*. Berlin: VEBB, 1972.
- Meijer, J., J. Chr. Perrenet, C. W. Zeilmaker, L. de Leeuw, W. E. groen, D. Kok & A. W. van Blokland-Vogelengang, A transfer test for mathematics containing items with cumulative hints. In: L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht: OW&OC, 1985.
- Meijer, J. & F. S. J. Riemersma, *Leren oplossen van wiskundige problemen. Eerste interim-verslag*. Amsterdam: Stichting Centrum voor Onderwijs-sonderzoek, 1982.
- Mettes, C. T. C. W. & A. Pilot, *Over het leren oplossen van natuurwetenschappelijke problemen*. (dissertatie, T.U. Eindhoven), Enschede 1980.
- Nelissen, J. M. C., *Kinderen leren wiskunde; een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs*. Dissertatie, Utrecht Rijksuniversiteit, 1987.
- Norman, D. A. & D. E. Rummelhart, Analogical processes in learning. In: J. Anderson (Ed.), *Cognitive skills and their acquisition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1981.

- Perrenet, J. Chr., Een transfertest voor wiskunde. *Euclides*, 1985, 61, 4, 137-144.
- Polya, G., *How to solve it?* (2nd edition). New York: Doubleday Anchor Books, 1957.
- Reigeluth, C. M. (Ed.), *Instruction-design theories and models, An overview of their current status*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.
- Resnick, L. B. & W. W. Ford, *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1981.
- Riemersma, F. S. J. & J. Meijer, *Leren oplossen van wiskundige problemen: analyse van hardop denk-protocolen*. Amsterdam: Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek, 1983.
- Riet, N. van 't, & G. Schoemaker, Uit het dagboek van twee loerders (4). *Wiskrant*, 1981, 21, middenkatern.
- Riet, S. P. van 't, & L. de Leeuw, Setvorming en wiskunde-onderwijs. Het vermenigvuldigen van wortelgetallen; eenvoudige algoritmen. *Euclides*, 1981, 56, 95-106.
- Rosch, E. & B. B. Lloyd, *Cognition and Categorization*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1978.
- Schoenfeld, A. H., *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press Inc., 1985.
- Simon, H. A. & L. Siklóssy, *Representation and meaning; Experiments with information processing systems*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1972.
- Streun, A. van, Op zoek naar transfer. In: S. Dijkstra & P. Span (Red.), *Leerprocessen en instructie, bijdragen aan de Onderwijsresearch*. Lisse: Swets & Zeitlinger, 1986a.
- Streun, A. van, De rol van representaties bij het oplossen van problemen. *Tijdschrift voor Didactiek der Beta-Wetenschappen*, 1986b, 4, 38-52.
- Teare, R. B., Recapitulation from the viewpoint of a teacher. In: D. T. Tuma & F. Reif (Eds.), *Problem solving and education: Issues in teaching and research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1980.
- Treffers, A. & F. Goffree, Rational analysis of realistic mathematics education. In: L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht: OW&OC, 1985.
- Vygotskij, L. S., M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman, *Mind in society; the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.
- Vygotskij, L. S., *Denken und Sprechen*. Berlin: Akademie-Verlag, 1964.
- Wertsch, J. V., *Culture, communication and cognition: A Vygotskian perspective*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1985.
- Winston, P. H., *Artificial Intelligence*. Reading: Addison Wesley, 1977.

Curriculum vitae

J. Meijer studeerde psychologie aan de U.v.A. Was tussen 1982 en 1986 werkzaam bij de Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek van de U.v.A. Vanaf 1984 tot 1987 werkzaam als wetenschappelijk onderzoeker bij de Vakgroep Functieleer en Methodenleer van de V.U. Deed onderzoek naar het leren oplossen van wiskunde problemen door leerlingen van het voortgezet onderwijs. Is nu verbonden aan de SCO, Amsterdam.

Adres: Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek, Gebouw De Narwal, Grote Bickersstraat 72, 1013 KS Amsterdam.

J. Chr. Perrenet studeerde wis- en natuurkunde aan de R.U.U. en psychologie aan de U.v.A. Gaf enige jaren wiskunde-onderwijs op verschillende niveaus en deed onderzoek naar rekenonderwijs. Was van 1984 tot 1987 werkzaam als wetenschappelijk onderzoeker bij de Vakgroep Functieleer en Methodenleer van de V.U. en deed onderzoek naar het leren oplossen van wiskunde problemen door leerlingen van het voortgezet onderwijs. Is nu verbonden als wetenschappelijk medewerker op het gebied van de wiskunde-didactiek aan de Vakgroep Onderwijskunde van de R.U.U.

F. S. J. Riemersma studeerde psychologische functieleer aan de Universiteit van Amsterdam. Sedert 1976 is hij werkzaam in de onderwijsresearch, aanvankelijk bij het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie; thans is hij als senior-projectleider verbonden aan de Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek te Amsterdam. Zijn aandachtsgebieden zijn onderwijsleerprocessen, in het bijzonder leren probleemoplossen en evaluatie-onderzoek zowel met betrekking tot grootschalige vernieuwingen als met betrekking tot beperkte curriculum-ontwikkelingsprojecten.

Manuscript aanvaard 12-10-'87

Summary

Meijer, J., J. Chr. Perrenet & F. Riemersma. 'Learning problem solving in mathematics education.' *Pedagogische Studiën*, 1988, 65, 16-31.

In order to solve mathematical problems, students should be able to apply their acquired mathematical knowledge in new, unknown (problem) situations. In this article, the transfer of knowledge is examined from a cognitive psychological and a didactical point of view. On the basis of cognitive psychological theory, the importance of learning by example as well as learning by explication is stressed. It is suggested that offering help step-by-step to students can enhance their problem solving abilities, without ignoring their own ideas and initiatives.

Transfer of mathematical knowledge is explicated more specifically from a didactical point of view. Advantages and disadvantages of algorithmic and heuristic teaching methods are mentioned in relation to the contents of various curricula for the teaching of mathematics. Finally, an outline of a teaching method is presented that is centered on problem solving in mathematics. It is assumed that restructuring the presentation and content of subject matter alone is insufficient for enhancing problem solving skills of students. Instead, special attention should be given to the role of teachers and the use of other than conventional teaching methods.