Oplossingsstrategieën van eersteklassers bij eenvoudige redactie-opgaven over optellen en aftrekken

E. DE CORTE & L. VERSCHAFFEL
Onderzoekscentrum voor Onderwijsleerprocessen Katholieke Universiteit te Leuven

Samenvatting

In deze bijdrage worden enkele resultaten vermeld van een longitudinale studie waarin we een kwalitatieve analyse verricht hebben van de oplossingsvaardigheden en de denkprocessen van dertig eersteklassers bij een serie eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes (Verschaffel, 1984). We spitsen ons daarbij toe op de bespreking van een drietal bevindingen betreffende de aard van de oplossingsstrategieën van deze kinderen en de invloed van de opgavekenmerken op het strategiegebruik. De resultaten worden geconfronteerd met inzichten en bevindingen uit andere recente onderzoekingen op dit gebied, voornamelijk de longitudinale studie van Carpenter & Moser (1982).

1 *Inleiding*

De voorbije decennia zijn redactie-opgaven in het algemeen en aanvankelijke optel- en aftrekvraagstukjes in het bijzonder talloze malen tot object van psychologisch onderzoek gemaakt. Op het einde van de jaren zeventig drong de informatieverwerkingsbenadering van de menselijke cognitie binnen in het onderzoek van het leren oplossen van eenvoudige redactie-opgaven over optellen en aftrekken. Illustratief voor dit recent cognitief-psychologisch speurwerk zijn de studies van de Pittsburghse onderzoekers Greeno, Heller en Riley (zie o.m. Heller & Greeno, 1978; Heller, 1980; Riley, Greeno & Heller, 1983) en het longitudinale onderzoek van de Mathematics Work Group van het Wisconsin Center for Education Research te Madison (zie o.m. Carpenter, Hiebert & Moser, 1981; Carpenter & Moser, 1982; Carpenter, 1983).

Sedert enige jaren loopt ook aan het Onderzoekscentrum voor Onderwijsleerprocessen te Leuven een project dat binnen dit nieuwe paradigma te situeren is. In het kader van dit project werd bij dertig eersteklassers gespreid over het ganse schooljaar kwalitatief empirisch materiaal verzameld over de ontwikkeling van hun denkprocessen bij aanvankelijke optel- en aftrekvraagstukjes. Bij het vergaren en het verwerken van de onderzoeksgegevens hebben wij onze aandacht toegespitst op de volgende twee vragen: 1. hoe verloopt bij jonge kinderen het tekstverwerkingsproces dat leidt tot een (interne) representatie van de probleemsituatie en welke kenniselementen spelen daarbij een cruciale rol; 2. welke strategieën worden door deze kinderen gehanteerd om uitgaande van de opgebouwde probleemrepresentatie de grootte van de onbekende hoeveelheid te bepalen? Over de onderzoeksresultaten in verband met de *representatieprocessen* hebben we elders reeds verslag uitgebracht (De Corte & Verschaffel, 1983; 1984a; 1984b). In onderhavige bijdrage bespreken we enkele bevindingen met betrekking tot de *oplossingsstrategieën* van de leerlingen. We confronteren deze bevindingen met de inzichten en de resultaten uit andere recente studies, die in de volgende paragraaf kort voorgesteld worden, m.n. het pionierswerk dat Greeno c.s. op dit terrein verricht hebben en de longitudinale studie van Carpenter & Moser.

2 *Recent Amerikaans onderzoek over oplossingsstrategieën bij aanvankelijke optel- en aftrekvraagstukjes*

2.1 *Het semantisch oplossingsmodel van Heller en Greeno*

Op het eind van de jaren zeventig ontwikkelden Heller & Greeno (1978; Heller, 1980) een model voor het oplossen van eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes, waarin het accent gelegd wordt op het semantisch verwerken van informatie als een essentiële component van het begrijpen van een probleem. Bij dit semantisch verwerken staat het vatten van de betekenisvolle verbanden in de probleemsituatie centraal; er wordt een semantische representatie opgebouwd van de kwantitatieve relaties uit de situatie.

Deze auteurs zijn vooreerst op zoek gegaan naar de verschillende semantische structuurtypes die aan eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes ten grondslag liggen. Op basis van een analyse van een paar honderd dergelijke opgaven, die ze aantroffen in rekenboeken en schoolvorderingentests, hebben ze vooreerst drie basiscategorieën onderscheiden: redactie-opgaven met een oorzaak-veranderings-, een combinatie- en een vergelijkingsstructuur. 1. *Oorzaak-veranderingsopgaven* bestempelen zij als vraagstukjes waarin door één of andere gebeurtenis de grootte van een hoeveelheid objecten of personen gewijzigd wordt. Bijvoorbeeld: 'Jan had 8 knikkers. Hij gaf er 5 aan Tom. Hoeveel knikkers houdt Jan over?' De semantische structuur van dit probleemtype bevat drie componenten: een initiële kwantitatieve toestand (de startset), een actie – een vermeerdering of vermindering – die een verandering in de initiële toestand tot gevolg heeft (de veranderingsset) en een kwantitatieve eindtoestand (de eindset). 2. In een *combinatievraagstukje* is volgens de auteurs sprake van twee afzonderlijke hoeveelheden die samen een derde, gecombineerde hoeveelheid vormen. Bijvoorbeeld: 'Jan heeft 3 knikkers. Tom heeft 5 knikkers. Hoeveel knikkers hebben zij samen?' De semantische structuur van dit probleemtype bevat twee subsets en één superset. 3. Bij *vergelijkingsopgaven* ten slotte gaat het om twee hoeveelheden die vergeleken worden en om het verschil tussen beide. Dit is bijvoorbeeld het geval in de opgave: 'Jan heeft 3 knikkers. Tom heeft 8 knikkers. Hoeveel knikkers heeft Tom meer dan Jan?' De drie componenten uit de semantische structuur van dit type vraagstukjes zijn de twee hoeveelheden die vergeleken worden en de hoeveelheid die het verschil uitdrukt.

Binnen elk van deze drie basiscategorieën maken Heller & Greeno (1978) verder onderscheid naargelang van de aard van de onbekende hoeveelheid. Oorzaak-veranderings- en vergelijkingsopgaven delen zij ten slotte ook nog in op basis van de richting van de actie of de relatie waarvan sprake is in het vraagstukje. Op deze manier bekomen zij veertien types van eenvoudige optel- en aftrekopgaven. In Tabel 1 worden deze veertien types vermeld samen met een voorbeeldopgave en hun semantische structuurkenmerken.

Hoe gaat nu volgens Heller & Greeno (1978) een jonge competente oplosser tewerk wanneer hij met een dergelijk vraagstukje geconfronteerd wordt? Volgens hun model bouwt de leerling in de eerste fase van het oplossingsproces een globale, min of meer abstracte, interne representatie op van de belangrijkste componenten en relaties uit de opgave in de vorm van één van de drie eerder vermelde semantische structuren. Nadat de leerling deze probleemrepresentatie heeft opgebouwd, gaat hij in een tweede fase over tot de selectie van een geschikte rekenoperatie, waarmee het onbekende getal uit deze representatie geïdentificeerd kan worden: ofwel een directe optelling met de twee getallen uit de opgave $(a+b)$, ofwel een directe aftrekking $(a-b)$. Volgens Heller & Greeno (1978) bestaat er bij de leerling slechts voor zes van de veertien opgaventypes een rechtstreekse associatie tussen de opgebouwde probleemrepresentatie enerzijds en één van deze rekenoperaties anderzijds, m.n. voor OV-I-, OV-II-, C-I-, C-II-, VG-I- en VG-II-vraagstukjes. Bij de overige acht zou een dergelijke directe band niet bestaan en zou pas overgegaan worden tot de selectie van de geschikte rekenoperatie na transformatie van de oorspronkelijke probleemrepresentatie tot een structuur, waaraan één van de beide rekenoperaties wel rechtstreeks gekoppeld kan worden. Zo bestaat er volgens Heller & Greeno (1978) bijvoorbeeld wél een directe associatie tussen de interne representatie van het vraagstukje 'Joe had 3 marbles. He found 5 more marbles. How many marbles did Joe have then?' en de optelling $3+5$, maar niet tussen de opgave 'Joe had 3 marbles. He found some more marbles. Then he had 8 marbles. How many marbles did Joe find?' en de aftrekoperatie $8-3$. Bij dit laatste vraagstukje gaat de leerling pas over tot de selectie en de uitvoering van de geschikte rekenoperatie na transformatie of *re*-representatie van de oorspronkelijke pro-

Tabel 1 *Voorbeelden van en toelichting bij de veertien types van eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes van Heller & Greeno (naar: Heller, 1980)*

Naam	Voorbeeld	Schema	Richting	Onbekende
OV-I*	Jan had 3 knikkers. Tom gaf hem 5 knikkers bij. Hoeveel knikkers heeft Jan nu?	Oorzaak-verandering	vermeerdering	eindset
OV-II	Jan had 8 knikkers. Hij gaf 5 knikkers aan Tom. Hoeveel knikkers heeft Jan nu?	Oorzaak-verandering	vermindering	eindset
OV-III	Jan had 3 knikkers. Tom gaf Jan wat knikkers bij. Nu heeft Jan 8 knikkers. Hoeveel knikkers heeft Tom Jan bijgegeven?	Oorzaak-verandering	vermeerdering	veranderingsset
OV-IV	Jan had 8 knikkers. Hij gaf wat knikkers aan Tom. Nu heeft Jan 3 knikkers. Hoeveel knikkers heeft Jan aan Tom gegeven?	Oorzaak-verandering	vermindering	veranderingsset
OV-V	Jan had wat knikkers. Tom gaf Jan 5 knikkers bij. Nu heeft Jan 8 knikkers. Hoeveel knikkers had Jan eerst?	Oorzaak-verandering	vermeerdering	startset
OV-VI	Jan had wat knikkers. Hij gaf 5 knikkers aan Tom. Nu heeft Jan 3 knikkers. Hoeveel knikkers had Jan eerst?	Oorzaak-verandering	vermindering	startset
C-I	Jan heeft 3 knikkers. Tom heeft 5 knikkers. Hoeveel knikkers hebben Jan en Tom samen?	Combinatie	–	superset
C-II	Jan en Tom hebben samen 8 knikkers. Tom heeft 5 knikkers. Hoeveel knikkers heeft Jan?	Combinatie	–	subset
VG-I	Jan heeft 3 knikkers. Tom heeft 8 knikkers. Hoeveel knikkers heeft Tom meer dan Jan?	Vergelijking	meer	verschilset
VG-II	Jan heeft 8 knikkers. Tom heeft 3 knikkers. Hoeveel knikkers heeft Tom minder dan Jan?	Vergelijking	minder	verschilset
VG-III	Jan heeft 3 knikkers. Tom heeft 5 knikkers meer dan Jan. Hoeveel knikkers heeft Tom?	Vergelijking	meer	vergeleken set
VG-IV	Jan heeft 8 knikkers. Tom heeft 3 knikkers minder dan Jan. Hoeveel knikkers heeft Tom?	Vergelijking	minder	vergeleken set
VG-V	Jan heeft 8 knikkers. Hij heeft er 5 meer dan Tom. Hoeveel knikkers heeft Tom?	Vergelijking	meer	referentieset
VG-VI	Jan heeft 3 knikkers. Hij heeft er 5 minder dan Tom. Hoeveel knikkers heeft Tom?	Vergelijking	minder	referentieset

* OV = Oorzaak-verandering; C = Combinatie; VG = Vergelijking

bleemrepresentatie in termen van het oorzaak-veranderingsschema naar het combinatieschema, aldus deze auteurs. Wij beklemtonen evenwel dat dit hypothetisch oplossingsmodel van Heller & Greeno (1978) grotendeels het resultaat is van een *rationele* taakanalyse; empirisch materiaal dat aan de diverse hypothesen die in dit model vervat zitten, rechtstreeks en duidelijk steun verleent, wordt door hen nauwelijks aangereikt.

2.2 *De longitudinale studie van Carpenter & Moser*

Eind 1978 startten Carpenter & Moser (1982; Carpenter, 1983; Carpenter e.a., 1981) een longitudinale studie waarin volgende vragen centraal stonden: via welke strategieën lossen jonge kinderen eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes op en hoe ontwikkelen deze strategieën zich gedurende de eerste jaren van de basisschool?

Drie jaar lang werden 144 kinderen gevolgd. Gedurende deze periode werden zij acht keer individueel geïnterviewd: drie keer in de loop van het eerste leerjaar, drie keer tijdens het tweede leerjaar en twee keer in de loop van het derde leerjaar. Bij de start van het onderzoek én bij de tweede afname hadden deze kinderen nog geen introductie in het schrijven en oplossen van formule-opgaven over optellen en aftrekken gekregen; bij de afsluiting hadden zij onderwijs in het oplossen van optel- en aftreksommen met getallen tot duizend achter de rug. Van 88 leerlingen werden volledige gegevens verzameld.

In deze studie werd met slechts zes opgaventypes gewerkt: twee optelvraagstukjes (een OV-I en een C-I-opgave) en vier aftrekvraagstukjes (een OV-II-, een OV-III-, een C-II- en een VG-I-opgave).

Het individueel interview verliep als volgt. De proefleider las de opgave voor en vroeg aan het kind om ze op te lossen. Indien de onderzoeker erin slaagde om door observatie van het extern oplossingsgedrag van de leerling alléén, de strategie van de leerling thuis te brengen, stelde hij geen bijkomende vragen en ging hij over naar het volgende vraagstukje. Lukte dit hem echter niet onmiddellijk, dan trachtte hij bijkomende informatie in te winnen door de leerling achteraf te vragen om uit te leggen hoe hij tewerkgegaan was. Indien de leerling daarop niet reageerde, ging de interviewer over tot het stellen van meer gerichte vragen zoals 'Heb je geteld?' 'Hoe heb je geteld?', 'Ben je bovenaan begonnen?', enz.

Het classificatieschema voor adequate oplossingsstrategieën bij aanvankelijke optel- en aftrekvraagstukjes, waarvan in de studie van Carpenter & Moser gebruik gemaakt werd, is gebaseerd op literatuurgegevens enerzijds en op de resultaten van een beperkt vooronderzoek anderzijds. Dit classificatieschema is opgebouwd uit twee dimensies. In de eerste plaats wordt daarin onderscheid gemaakt tussen 'additive' en 'subtractive strategies'. 'Additive strategies' zijn strategieën die, indien goed uitgevoerd, tot het correcte antwoord leiden op een optelvraagstukje, d.i. een redactie-opgave waarvan het antwoord gevonden kan worden door de som van de twee gegeven getallen te maken. 'Subtractive strategies' daarentegen zijn strategieën die, indien correct uitgevoerd, leiden tot het juiste antwoord op een aftrekvraagstukje, d.i. een redactie-opgave die opgelost kan worden door een directe aftrekoperatie met de twee gegeven getallen. In de tweede plaats wordt onderscheid gemaakt tussen drie niveaus van abstractie of internalisatie: 1. *materiële telstrategieën,* waarbij de uitkomst gevonden wordt door met concreet materiaal (blokken, vingers...) een fysische representatie op te bouwen van de hoeveelheden en eventueel van de actie en/of relatie uit de opgave; 2. *verbale telstrategieën,* waarbij de leerling het antwoord vindt door de getallenrij voorwaarts of achterwaarts op te zeggen zonder dat hij/zij een materiële representatie maakt van de twee gegeven getallen; 3. *mentale strategieën,* waarbij gebruik gemaakt wordt van sommen, waarvan men de uitkomst 'uit het hoofd kent' (Carpenter & Moser, 1982, p. 14). In Tabel 2 geven we een overzicht van alle oplossingsstrategieën die door Carpenter & Moser onderscheiden worden.

Thans vermelden we enkele resultaten van deze studie. Wat de gegevens in verband met het internalisatieniveau betreft, stelden Carpenter & Moser vast dat de kinderen tijdens de eerste twee afnamen de vraagstukjes vooral via materiële en verbale telstrategieën oplosten (resp. niveau 1 en 2 uit Tabel 2). In de daaropvolgende interviews werd meer en meer gebruik gemaakt van de gesofisticeerde mentale oplossingsstrategieën 'gekende som' en 'afgeleide som' (niveau 3). Over het algemeen evolueerden de leerlingen echter vrij traag in de richting van het hoogste internalisatieniveau: op het einde van het eerste leerjaar maakten nog maar 11% van de leerlingen min of meer systematisch gebruik van sommen om de vraagstukjes tot een goed einde te brengen (Carpenter, 1983, p. 28).

Wat de aard van de adequate oplossingsstrategieën betreft, stelden Carpenter & Moser vast dat de eersteklassers, die voornamelijk op materieel en verbaal niveau tewerkgingen, gebruik maakten van een grote verscheidenheid van strategieën. Dit bleek vooral het geval bij de aftrekvraagstukjes. Bij deze opgaven ontdekten zij bovendien een sterk verband tussen de semantische structuurkenmerken van de opgaven enerzijds en de aard van de materiële en verbale strategieën waarmee ze opgelost werden anderzijds. De diverse aftrekvraagstukjes werden namelijk stuk voor stuk het frequentst aangepakt met dit soort van strategieën, dat het nauwst aansluit bij de betekenisstructuur ervan. Bij wijze van voorbeeld vermelden we in Tabel 3 de meest voorkomende materiële oplossingsstrategieën bij drie van de vier aftrekopgaven uit hun studie.

Bij het vierde aftrekvraagstukje – de C-II-opgave ('There are 6 children on the playground. Four of them are boys and the rest are girls. How many girls are on the play-

Tabel 2 *Het classificatieschema voor adequate oplossingsstrategieën van Carpenter & Moser (naar: Carpenter, 1983)*

"Additive strategies"		"Subtractive strategies"
Voorbeeldopgave : Wally had 3 munten. Zijn vader gaf hem er nog 6 bij. Hoeveel munten heeft Wally nu ?		Voorbeeldopgave : Joe heeft 3 ballonnen. Zijn zus Connie heeft 9 ballonnen. Hoeveel ballonnen heeft Connie meer dan Joe ?
Alles tellen met materiaal (ATMM) : er worden twee groepen objecten gevormd overeenkomstig de twee gegeven getallen 3 en 6; daarna worden alle objecten één per één geteld te beginnen vanaf 1 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven.	NIVEAU 1 (Materiële telstrategieën)	Scheiden van het grootste getal (SVG) : er wordt een groep objecten gevormd overeenkomstig het grootste getal, nl. 9; daaruit worden één per één zoveel objecten weggenomen als aangeduid wordt door het kleinste getal, nl. 3; het aantal resterende objecten wordt geteld (1, 2, 3, 4, 5, 6); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven. Scheiden tot het kleinste getal (STK) : er wordt een groep objecten gevormd overeenkomstig het grootste getal, nl. 9; daaruit worden één per één objecten verwijderd totdat er nog zoveel objecten overblijven als aangeduid wordt door het kleinste getal, nl. 3; het aantal weggenomen objecten wordt geteld (1, 2, 3, 4, 5, 6); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven. Toevoegen (T) : er wordt een groep objecten geconstrueerd overeenkomstig het kleinste getal uit de opgave, nl. 3; daaraan worden één per één objecten toegevoegd totdat er zoveel liggen als aangeduid wordt door het grootste getal, nl. 9; het aantal bijgenomen objecten wordt geteld (1, 2, 3, 4, 5, 6); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven. Paren (P) : er worden twee groepen objecten geconstrueerd overeenkomstig de twee gegeven getallen, nl. 3 en 9; vervolgens worden de objecten uit de kleinste groep in één-éénrelatie gelegd met evenveel objecten uit de grootste groep; tenslotte wordt geteld hoeveel objecten uit de grootste groep geen corresponderend object hebben in de kleinste groep (1, 2, 3, 4, 5, 6); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven.
Alles tellen zonder materiaal (ATZM) : de getallenrij wordt in voorwaartse zin opgezegd beginnend met 1; wanneer het eerste getal bereikt is (1, 2, 3), wordt zoveel keer één verdergeteld als aangeduid wordt door het andere getal (4, 5, 6, 7, 8, 9); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven. Voorttellen vanaf het eerste getal (VT(E)): de getallenrij wordt in voorwaartse zin opgezegd beginnend met het eerste getal, nl. 3, er wordt nog zoveel keer één verdergeteld als aangeduid wordt door het andere getal, nl. 6 (4, 5, 6, 7, 8, 9); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven. Voorttellen vanaf het grootste getal (VT(G)) : de getallenrij wordt in voorwaartse zin opgezegd beginnend met het grootste getal, nl. 6; er wordt nog zoveel keer één verdergeteld als aangeduid wordt door het andere getal, nl. 3 (7, 8, 9); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven.	NIVEAU 2 (Verbale telstrategieën)	Terugtellen vanaf het grootste getal (TTVG) : de getallenrij wordt in achterwaartse zin opgezegd beginnend met het grootste getal, nl. 9; dit getal wordt zoveel keer met één verminderd als aangeduid wordt door het andere getal, nl. 3 (8, 7, 6); het laatst uitgesproken telwoord wordt als antwoord gegeven. Terugtellen tot het kleinste getal (TTTK) : de getallenrij wordt in achterwaartse zin opgezegd beginnend met het grootste getal, nl. 9; van dit getal wordt afgeteld totdat het kleinste getal bereikt is (8, 7, 6, 5, 4, 3); het aantal keer dat het grootste getal met één verminderd is, nl. 6 wordt als antwoord gegeven. Voorttellen vanaf het kleinste getal (VTVK) : de getallenrij wordt in voorwaartse zin opgezegd beginnend met het kleinste getal, nl. 3; vanaf dit getal wordt verdergeteld totdat het grootste getal, nl. 9 bereikt is (4, 5, 6, 7, 8, 9); het aantal keer dat het kleinste getal met één vermeerderd is, nl. 6 wordt als antwoord gegeven.
Gekende som (GS) : het antwoord op de opgave wordt gevonden doordat de oplosser de uitkomst van een rekensom waarin de twee gegeven getallen voorkomen, uit het hoofd kent (3 + 6 = 9). Afgeleide som (AS) : het antwoord op de opgave wordt gevonden doordat de oplosser gebruik maakt van één of meerdere andere rekensommen waarvan hij de uitkomst uit het hoofd kent (3 + 7 = 10 dus 3 + 6 = 9).	NIVEAU 3 (Mentale rekenstrategieën)	Gekende som (GS) : het antwoord op de opgave wordt gevonden doordat de oplosser de uitkomst van een rekensom waarin de twee gegeven getallen voorkomen, uit het hoofd kent (9 - 3 = 6). Afgeleide som (AS) : het antwoord op de opgave wordt gevonden doordat de oplosser gebruik maakt van één of meerdere andere rekensommen waarvan hij de uitkomst uit het hoofd kent (10 - 3 = 7 dus 9 - 3 = 6).

Tabel 3 *Materiële oplossingsstrategieën bij drie aftrekvraagstukjes uit het onderzoek van Carpenter & Moser (1982)*

Opgaventype	Voorbeeld	Oplossingsstrategie
OV-II	Tom had 11 snoepjes. Hij gaf 3 snoepjes aan Martha. Hoeveel snoepjes heeft Tom nu ?	Scheiden van (SV) : de leerling vormt een groep van 11 blokken; daaruit verwijdert hij vervolgens 7 blokken; dan telt hij het aantal resterende blokken (4) en geeft dit getal als antwoord.
OV-III	Kathy heeft 5 stiften. Hoeveel stiften moet zij nog bijnemen opdat ze in het totaal 7 stiften zou hebben ?	Toevoegen (T) : de leerling vormt eerst een groep van 5 blokken; vervolgens voegt hij daar blokken aan toe, totdat er in het totaal 7 blokken liggen; dan telt hij het aantal bijgenomen blokken (2) en geeft dit getal als antwoord.
VG-I	Joe heeft 4 ballonnen. Zijn zus Connie heeft 5 ballonnen. Hoeveel ballonnen heeft Connie meer dan Joe ?	Paren (P) : de leerling vormt één groep van 3 en één van 5 blokken; vervolgens gaat hij na hoeveel blokken uit de groep van 5 geen corresponderende blok hebben in de groep van 3; dit aantal (2) wordt als antwoord gegeven.

ground?') – ten slotte, werden vooral SV- maar ook een niet onaanzienlijk aantal T-strategieën aangetroffen. Dat de C-II-vraagstukjes in tegenstelling tot de andere aftrekopgaven niet veruit het meest met één bepaalde soort van strategieën opgelost werden, wordt door de auteurs aan het ambiguë karakter van dit opgaventype toegeschreven: doordat in dit soort van vraagstukjes een expliciete verwijzing naar de één of andere actie ontbreekt, wordt hun semantische structuur noch door de SVG-, noch door de T-strategie adequaat weergegeven; en omdat één van de gegeven getallen een subset is van het andere, past de P-procedure daar evenmin goed bij (Carpenter & Moser, 1982, p. 18).

In tegenstelling tot de aftrekvraagstukjes, werd bij de optelopgaven geen systematisch verband gevonden tussen de semantische structuurkenmerken van de diverse opgaven enerzijds en het materieel en verbaal strategiegebruik anderzijds. Alle kinderen die een optelopgave op materieel niveau oplosten, pasten de 'alles tellen met materiaal'-strategie (ATMM) toe. Carpenter & Moser erkennen weliswaar dat van deze materiële oplossingsstrategie verschillende uitvoeringsmodaliteiten bestaan. Zo wijzen zij erop dat tijdens een beperkt vooronderzoek sommige kinderen bij de uitvoering van deze strategie onmiddellijk na het construeren van de twee groepen blokken overgingen tot het tellen van het totaal aantal blokken, terwijl anderen de beide groepen eerst effectief samenvoegden. Maar in hun longitudinale studie hielden Carpenter & Moser geen rekening met deze verschillende uitvoeringsmodaliteiten omdat uit het vooronderzoek gebleken was dat de verschillende optelvraagstukjes niet systematisch met andere varianten van de ATMM-strategie aangepakt worden en dat het soms moeilijk is om een concrete oplossingswijze in één van deze varianten onder te brengen (Carpenter & Moser, 1982, p. 14). Over een eventueel effect van de semantische structuurkenmerken van optelvraagstukjes op de aard van de verbale oplossingsstrategieën, wordt in hun publikaties evenmin gewag gemaakt.

De resultaten van de longitudinale studie van Carpenter & Moser nopen tot belangrijke aanvullingen en correcties op het theoretisch model over het oplossen van aanvankelijke optel- en aftrekvraagstukjes van Heller & Greeno (1978), dat we in 2.1 voorgesteld hebben. De belangrijkste kritiek die op basis van de onderzoeksresultaten van Carpenter & Moser kan worden geuit, is dat het model van Heller & Greeno geen rekening houdt met en geen rekenschap kan geven van het feit dat jonge kinderen eenvoudige rekenvraagstukjes blijkbaar oplossen aan de hand van een rijke en gevarieerde schat van z.g. informele telstrategieën, die niet samenvallen met de formele rekenoperaties die in dit theoretisch model zijn ingebouwd (Carpenter e.a., 1981, p. 38).

Er kleeft o.i. echter nog een aantal onvolkomenheden aan de analyse die Carpenter & Moser van de relatie tussen de kenmerken van aanvankelijke rekenvraagstukjes enerzijds en de aard van de oplossingsstrategieën van jonge kinderen anderzijds, verricht hebben. In de eerste plaats geven deze onderzoekers geen verklaring voor het feit dat ze wel een samenhang ontdekten tussen opgavekenmerken en oplossingsstrategieën bij aftrek-, maar niet bij optelvraagstukjes. Ten tweede verschaft hun analyse geen informatie over de wijze waarop kinderen die niet langer op materieel of op verbaal, doch op mentaal niveau opereren, dergelijke opgaven oplossen; meer bepaald rijst de vraag of ook op dit niveau de aard van de strategieën bepaald wordt door de semantische structuurkenmerken van het vraagstukje. Ten derde kan men zich afvragen of het strategiegebruik van jonge kinderen bij aanvankelijke redactieopgaven uitsluitend bepaald wordt door de semantische structuurkenmerken van het vraagstukje. In de volgende paragraaf zullen we een aantal eigen onderzoeksresultaten vermelden, die enig licht werpen op deze problemen. Vooraleer we daartoe overgaan, geven we een korte schets van de opzet en de uitvoering van onze studie.

3 *Opzet en resultaten van het eigen onderzoek*

3.1 *Opzet van het onderzoek*

Het empirisch materiaal is afkomstig uit een onderzoek dat wij gedurende het schooljaar 1981-82 doorgevoerd hebben in de eerste klas van een basisschool uit het Leuvense. Dertig kinderen werden in de loop van het schooljaar drie keer individueel geïnterviewd: één keer bij de aanvang, één keer in het midden en één keer op het einde van het eerste leerjaar. Gedurende deze interviews werden de kinderen met acht eenvoudige redactieopgaven geconfronteerd: vier optelvraagstukjes (een OV-I-, een OV-VI-, een C-I- en een VG-III-opgave) en vier aftrekvraagstukjes (een OV-II-, een OV-III-, een C-II en een VG-I-opgave). Tijdens het eerste en het tweede interview werkten we met de getallentritsen 3-5-8, 3-6-9 en 3-7-10; bij het derde interview werd met 5-7-12, 5-8-13 en 5-9-14 gewerkt.

Om de oplossingsstrategie van een leerling bij een vraagstukje te achterhalen, observeerde de interviewer gedurende het oplossingsproces aandachtig de hoofd-, oog- en mondbewegingen van de leerling, zijn verbale uitingen, vingerbewegingen en/of manipulaties van het concreet materiaal (poppen, blokken). Op basis van deze observatiegegevens bouwde hij een hypothese op omtrent de strategie die de leerling gevolgd had. Deze hypothese vormde het vertrekpunt van het daaropvolgend gesprekje. Dit werd begonnen met de vraag: 'Hoe heb je dit antwoord gevonden?' of 'Vertel me eens wat je zoal gedaan hebt om aan deze uitkomst te komen'. Was het voor de interviewer onmogelijk om op basis van de observatiegegevens enerzijds en het retrospectief materiaal anderzijds de oplossingsstrategie van de leerling te identificeren, dan nam hij zijn toevlucht tot twee bijkomende technieken, m.n. 'doorvragen' en 'mutuele observatie'. De techniek van 'doorvragen' komt hierop neer dat de interviewer, zonder zélf informatie te verschaffen, aan de leerling meer gerichte vragen stelt over aspecten van het voorbije oplossingsproces waarover de leerling geen spontane mededelingen gedaan heeft. Bij 'mutuele observatie' verwoordt de interviewer zijn hypothese over de oplossingsweg die de leerling gevolgd heeft, en laat hij de leerling daarop commentaar, aanvullingen en correcties aanbrengen.

Het classificatieschema waarin we de oplossingsstrategieën van de leerlingen geklasseerd hebben, is gebaseerd op de indeling van Carpenter & Moser, die in Tabel 2 voorgesteld werd. Op basis van recente literatuurgegevens enerzijds en de resultaten van onderhavige studie anderzijds, hebben wij echter een aantal belangrijke wijzigingen, aanvullingen en verfijningen aangebracht. Sommige daarvan komen in het vervolg van deze bijdrage aan bod. Voor een meer uitvoerig en systematisch overzicht van de verschilpunten tussen ons classificatieschema en dat van Carpenter & Moser verwijzen we naar Verschaffel (1984, p. 153 e.v.).

3.2 *Onderzoeksresultaten*

3.2.1 *Variatie in materiële oplossingsstrategieën bij optelvraagstukjes*

Eén van de belangrijkste vaststellingen uit de studie van Carpenter & Moser is dat er bij jonge basisschoolleerlingen die aftrekvraagstukjes op materieel niveau aanpakken, een systematisch verband bestaat tussen de semantische structuurkenmerken van de opgaven enerzijds en de aard van de oplossingsstrategieën anderzijds, en wel in deze zin dat de diverse vraagstukjes stuk voor stuk het frequentst aangepakt worden met dit soort van strategieën, dat de betekenisstructuur ervan het best weerspiegelt. Bij optelopgaven werd een dergelijk verband niet gevonden (zie 2.2).

Onze onderzoeksresultaten in verband met het materieel strategiegebruik bij aftrekvraagstukjes liggen globaal genomen in de lijn van de bevindingen van Carpenter & Moser (Verschaffel, 1984, p. 391). Maar voor deze die betrekking hebben op de optelopgaven is dit niet het geval. Een analyse van de materiële oplossingshandelingen bij de vier optelvraagstukjes uit onze studie suggereert immers dat ook bij deze opgaven een systematische samenhang bestaat tussen de semantische structuurkenmerken van de vraagstukjes enerzijds en de aard van de strategieën waarmee ze opgelost worden anderzijds.

Bijna alle leerlingen die de C-I-opgave ('Piet heeft 3 appels. An heeft 7 appels. Hoeveel appels hebben Piet en An samen?') op materieel niveau oplosten, vormden eerst een groep blokken overeenkomstig het eerste getal uit de opgave (3), dan een groep overeenkomstig het tweede getal (7), en telden vervolgens het totaal aantal blokken, eventueel nadat zij de twee groepen met beide handen naar elkaar toegeschoven hadden.

Het OV-I-vraagstukje daarentegen ('Piet had 3 appels. An gaf Piet 5 appels bij. Hoeveel appels heeft Piet nu?') werd vooral als volgt aangepakt: de leerling construeerde eerst een groep blokken overeenkomstig het eerste getal uit de opgave (3), voegde daar vervolgens zoveel blokken aan toe als aangeduid door het tweede getal (5), en telde ten slotte het totaal aantal blokken.

De OV-VI-opgave ('Piet had wat appels. Hij gaf 3 appels aan An. Nu heeft Piet 5 appels. Hoeveel appels had Piet eerst?') werd door verscheidene materiële oplossertjes op één van de voormelde manieren aangepakt. Maar bij dit vraagstukje troffen we daarnaast ook nog een andere werkwijze aan, die bij geen enkele andere opgave voorkwam. Deze komt hierop neer: de leerling nam eerst een willekeurig aantal blokken; vervolgens verwijderde hij daaruit zoveel blokken als aangeduid door het eerste gegeven getal uit de opgave, nl. 3; daarop voegde hij aan de aanvankelijke willekeurig gevormde groep blokken toe of nam hij daaruit blokken weg, totdat deze zoveel blokken telde, als aangeduid door het tweede getal uit de opgave, nl. 5; tot slot telde hij de blokken uit de twee groepen – nl. die van 3 en die van 5 – samen, en gaf dit aantal als antwoord op het vraagstukje.

Ongeveer de helft van de materiële oplossertjes van de VG-III-opgave ('Piet heeft 3 appels. An heeft 6 appels meer dan Piet. Hoeveel appels heeft An?') ging tewerk zoals bij het C-I- of het OV-I-vraagstukje beschreven. De andere helft volgde een andere strategie: zij construeerden eerst een groep blokken overeenkomstig het eerste getal uit de opgave, nl. 3; daarna vormden zij een tweede groep van 3 én 6 blokken; het antwoord bekwamen zij door alle blokken uit deze laatste groep te tellen.

Uit het bovenstaande blijkt dat, in tegenstelling tot het standpunt van Carpenter & Moser, ook de optelvraagstukjes door eersteklassers die op materieel niveau tewerkgaan, verschillend worden aangepakt. Er steekt bovendien een duidelijke systematiek in deze verscheidenheid, en wel in die zin dat, net zoals bij de aftrekvraagstukjes, elke materiële oplossingsstrategie het frequentst wordt aangetroffen bij dit soort opgaven, waarvan zij de semantische structuur het best weerspiegelt. We beklemtonen echter dat Carpenter & Moser weinig of geen onderzoeksgegevens aanvoeren ter ondersteuning van hun stellingname: in hun longitudinale studie werden slechts twee soorten optelvraagstukjes betrokken (een C-I- en een OV-I-opgave) en bovendien hebben zij geen systematische gegevens verzameld over eventuele verschillende uitvoeringsmodaliteiten van de ATMM-strategie (zie 2.2).

3.2.2 *Variatie in verbale oplossingsstrategieën bij optelvraagstukjes*

In het classificatieschema van Carpenter & Moser wordt binnen de verbale strategieën voor optelopgaven – meer bepaald binnen de voorttelstrategieën – onderscheid gemaakt tussen twee subcategorieën: 'voorttellen vanaf het eerste gegeven getal' en 'voorttellen vanaf het grootste gegeven getal', resp. afgekort met VT(E) en VT(G). In het eerste geval wordt met het eerste getal uit de opgave gestart; in het tweede met de grootste van de twee gegeven hoeveelheden (zie Tabel 2). Bij optelvraagstukjes waarin het kleinste getal vooraan staat, is 'voorttellen vanaf het grootste getal' de meest efficiënte strategie. Door de getallen uit de opgave van plaats te verwisselen zodat vanaf het grootste getal verdergeteld wordt, vermindert het aantal bij te tellen eenheden. Dit heeft een daling van de oplossingstijd en een vermindering van de belasting van het werkgeheugen tot gevolg (Verschaffel, 1984, p. 156).

In tegenstelling tot Carpenter & Moser hebben wij niet enkel bij de voorttelstrategieën, maar ook bij de andere verbale telstrategie uit hun classificatieschema – 'alles tellen zonder materiaal' (ATZM) – onderscheid gemaakt tussen gevallen waarin met het eerste getal uit de opgave begonnen wordt – z.g. ATZM(E)-strategieën – en die waarin met het grootste van de twee gegeven getallen gestart wordt – z.g. ATZM(G)-strategieën. Men kan immers argumenteren dat niet alleen bij de voorttel- maar ook bij de ATZM-strategie de omkering van de twee termen tot een verkorting van het oplossingsproces en tot een daling van de belasting van het werkgeheugen leidt, tenminste wanneer het kleinste getal vooraan staat in de opgave.

Zoals in 2.2 vermeld, wordt door Carpenter & Moser geen gewag gemaakt van een eventueel effect van de semantische structuurkenmerken op de aard van de verbale strategieën waarmee de diverse optelvraagstukjes opgelost worden. Een analyse van de verbale oplossingsstrategieën bij de optelvraagstukjes uit onze studie daarentegen bracht aan het licht dat sommige opgaventypes wel degelijk veel meer verbale G-strategieën uitlokten dan andere (Verschaffel, 1984, p. 234). Bij de C-I-opgave ('Piet heeft 3 appels. An heeft 7 appels. Hoeveel appels hebben Piet en An samen?') kwamen over de drie afnamen samen heel wat meer G-strategieën dan E-strategieën voor en dit bij elk van de twee verbale strategietypes (alles tellen met materiaal en voorttellen). Bij het OV-I-vraagstukje ('Piet had 3 appels. An gaf Piet 5 appels bij. Hoeveel appels heeft Piet nu?') was precies het tegenovergestelde het geval. Voor de vaststelling dat jonge kinderen blijkbaar sneller en vlotter in staat zijn de meer efficiënte verbale G-strategieën te gebruiken bij C-I- dan bij OV-I-opgaven, hebben wij de volgende hypothetische verklaring, die in verder onderzoek systematisch moet getoetst worden. Om een optelvraagstukje waarin het kleinste van de twee gegeven getallen vooraan staat met een G-strategie op te lossen, is in ieder geval een zekere reorganisatie van de oorspronkelijke probleemrepresentatie vereist. Immers, de opgebouwde probleemrepresentatie kan enkel aan een dergelijke oplossingsstrategie gekoppeld worden, wanneer de twee gekende hoeveelheden uit deze representatie 'van plaats verwisseld zijn'. Nu schijnt het ons toe dat de vereiste reorganisatie van de probleemrepresentatie niet bij alle vraagstukjes even ingrijpend van aard is. Met name zou deze reorganisatie heel wat minder diepgaand zijn wanneer de twee getallen behoren tot sets die een identieke rol vervullen in de probleemrepresentatie (bijvoorbeeld: de twee subsets uit het combinatieschema) dan wanneer het getallen betreft die horen bij sets die functioneel niet gelijkwaardig zijn (bijvoorbeeld: de startset en de transferset uit het oorzaak-veranderingsschema).

3.2.3 *Variatie in mentale oplossingsstrategieën bij optel- en aftrekvraagstukjes*

Carpenter & Moser vermelden in hun rapporten geen gegevens over de mogelijke invloed van de semantische structuurkenmerken van eenvoudige redactie-opgaven op de aard van de strategieën bij leerlingen die op *mentaal* niveau tewerkgaan. Dit is niet verwonderlijk. Immers, deze onderzoekers zijn uitgegaan van een classificatieschema waarin op het mentaal niveau enkel gedifferentieerd wordt tussen 'gekende som'- en 'afgeleide som'-strategieën (zie Tabel 2).

In onze studie daarentegen werd gebruik gemaakt van een meer uitgewerkt classificatieschema voor mentale oplossingsstrategieën. Daardoor waren wij in staat om ook bij de leerlingen die op mentaal niveau opereerden, de variatie in oplossingsstrategieën te exploreren, en kon worden nagegaan of op dit niveau eveneens een samenhang bestaat tussen de semantische structuurkenmerken van de vraagstukjes enerzijds en de aard van de oplossingsstrategieën anderzijds. Hierna vermelden we enkele onderzoeksgegevens die enig licht werpen op deze problematiek.

Overeenkomstig de bevindingen bij de verbale oplossingsstrategieën bracht een analyse van de mentale strategieën bij de optelvraagstukjes aan het licht dat ook hier bij de C-I-opgave aanzienlijk meer G- dan E-strategieën voorkwamen, terwijl bij het OV-I-vraagstukje precies het tegenovergestelde het geval was (Verschaffel, 1984, p. 234). In 3.2.2 hebben we hiervoor reeds een hypothetische verklaring gegeven.

In het classificatieschema van Carpenter & Moser wordt binnen de materiële strategieën voor aftrekvraagstukjes onderscheid gemaakt tussen 'scheiden vanaf het grootste getal' (SVG), 'scheiden tot aan het kleinste getal' (STK) en 'toevoegen' (T). Een gelijkaardige indeling wordt op het verbale plan gemaakt tussen resp. 'terugtellen vanaf het grootste getal' (TTVG), 'terugtellen tot aan het kleinste getal' (TTTK) en 'voorttellen vanaf het kleinste getal' (VTVK). Dit onderscheid tussen de drie verschillende soorten van oplossingsstrategieën op materieel en op verbaal vlak trekken de auteurs evenwel niet door naar het mentale (zie Tabel 2). Wij hebben dit wel gedaan. In ons classificatieschema worden dus ook op het hoogste niveau van internalisatie de oplossingsstrategieën in drie categorieën ingedeeld: 1. mentale strategieën waarbij het antwoord gevonden wordt door het grootste gegeven getal met het kleinste te verminderen (directe aftrekstrategieën); 2. strategieën waarbij de leerling nagaat met hoeveel hij het grootste getal moet verminderen om het kleinste getal te bekomen (indirecte aftrekstrategieën); 3. strategieën waarbij gezocht wordt hoeveel bij het kleinste getal moet worden opgeteld om het grootste getal te bekomen (indirecte optelstrategieën).

Aan de hand van dit onderscheid kunnen we aantonen dat ook op mentaal niveau de aard van de oplossingsstrategieën in belangrijke mate beïnvloed wordt door de semantische structuurkenmerken van de opgave. Zo stelden wij vast dat het OV-II-vraagstukje voornamelijk met directe aftrekstrategieën opgelost werd (Verschaffel, 1984, p. 181). Ter illustratie geven we hierna een ingekort stukje protocol van een leerling die de opgave 'Piet had 12 appels. Hij gaf 4 appels aan An. Hoeveel appels heeft Piet nu?' met een dergelijke strategie tot een goed einde bracht.

I : (Leest opgave.)
Ll : '8.'
I : 'Hoe kom je daaraan?'
Ll : 'Wij hebben dat al geleerd. 4 is gelijk aan 2 plus 2. En 12 min 2 is 10. En daar nog eens 2 van af is 8.'

In tegenstelling tot de OV-II-opgave, werd het OV-III-vraagstukje ('Piet had 5 appels. An gaf Piet wat appels bij. Nu heeft Piet 14 appels. Hoeveel appels heeft An aan Piet gegeven?') slechts in een paar uitzonderingsgevallen met een directe aftrekstrategie opgelost. De overgrote meerderheid van de mentale oplossers paste bij deze opgave een indirecte optelstrategie toe (Verschaffel, 1984, p. 251). Ook hiervan geven we een stukje protocol ter illustratie.

I : (Leest opgave.)
Ll : '9.'
I : 'Hoe kom jij aan die 9?'
Ll : 'Omdat ik bij die 5 van Piet eerst nog 5 bijgedaan heb. Toen had ik er al 10. En toen heb ik er nog 4 bijgedaan en dat was 14.'
I : 'En toen heb je die 5 en die 4 samen geteld en dat was 9?'
Ll : 'Ja.'

De vermelde onderzoeksresultaten laten dus zien dat de invloed van de semantische structuurkenmerken op de aard van de oplossingsstrategieën blijft bestaan, wanneer de leerlingen niet langer op materieel of verbaal, doch op mentaal niveau eenvoudige vraagstukjes oplossen.

3.2.4 *Semantische structuurkenmerken en andere opgavekenmerken*

Zowel het longitudinaal onderzoek van Carpenter & Moser (1982) als onze studie tonen aan dat de aard van de strategieën waarmee jonge basisschoolleerlingen aanvankelijke rekenvraagstukjes oplossen, in belangrijke mate bepaald wordt door de semantische structuurkenmerken die aan deze opgaven ten grondslag liggen. De vraag rijst echter of deze opgavekenmerken de enige zijn die de aard van de oplossingsstrategieën van jonge kinderen determineren. Tijdens de verwerking van het onderzoeksmateriaal hebben we alvast één aanduiding gevonden dat hun strategiegebruik wellicht mede beïnvloed wordt door een ander opgavekenmerk, m.n. de volgorde waarin de gegeven elementen uit het semantisch schema in de opgavetekst geïntroduceerd worden.

Carpenter & Moser constateerden bij de C-II-opgaven heel wat meer SVG- en TTVG- dan T- en VTVK-strategieën (zie 2.2). Wij stelden precies het omgekeerde vast: de overgrote meerderheid van de leerlingen die ons C-II-vraagstukje op materieel en verbaal niveau aanpakten, pasten een T- of een VTVK-strategie toe (Verschaffel, 1984, p. 208). Een nadere analyse van de tekst van de C-II-vraagstukjes uit de beide studies biedt een plausibele verklaring voor dit opmerkelijk verschil inzake strategiegebruik. In ons C-II-vraagstukje ('Piet heeft 3 appels. An heeft ook wat appels. Piet en An hebben samen 9 appels. Hoeveel appels heeft An?') staat eerst de grootte van één van de subsets vermeld en wordt pas op het einde de kwantiteit van de superset gegeven. In de C-II-vraagstukjes van Carpenter & Moser wordt begonnen met de vermelding van de grootte van de superset en wordt pas daarna de kwantiteit van één van de subsets gegeven ('There are 6 children on the playground. Four of them are boys and the rest are girls. How many girls are on the playground?').

Deze vaststelling schijnt erop te wijzen dat het strategiegebruik van jonge kinderen bij aanvankelijke redactie-opgaven niet enkel beïnvloed wordt door de semantische structuurkenmerken van het vraagstukje, maar ook door de volgorde waarin de diverse componenten uit het semantisch schema, dat eraan ten grondslag ligt, in de opgavetekst geïntroduceerd worden. We beklemtonen echter dat wij tot deze hypothese betreffende de invloed van de volgorde van de gegevens in de opgavetekst gekomen zijn op basis van de confrontatie van de resultaten van twee verschillende studies bij slechts één soort van aanvankelijke rekenvraagstukjes. Er is dus bijkomend onderzoek vereist, waarin het effect van deze factor op een meer systematische wijze en voor meerdere types van optel- en aftrekopgaven nagegaan wordt. Het is trouwens wenselijk dat in deze toekomstige onderzoekingen ook nog andere taakkenmerken betrokken worden, zoals de aard en de grootte van de getallen en de context waarin de leerlingen met het probleem geconfronteerd worden (Verschaffel, 1984, p. 129). Tevens moet aandacht besteed worden aan de invloed van onderwijsfactoren, zoals de gehanteerde rekenmethode en de concrete klaspraktijk, op de oplossingsstrategieën van jonge basisschoolleerlingen.

4 *Slotbeschouwingen*

In deze bijdrage hebben we enkele resultaten vermeld van een longitudinale studie waarin we een kwalitatieve analyse verricht hebben van de denkprocessen van dertig eersteklassers bij een serie eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes. We hebben ons daarbij toegespitst op de bespreking van een aantal bevindingen betreffende de strategieën die door deze kinderen gehanteerd werden om de opgaven op te lossen. We hebben deze resultaten geconfronteerd met inzichten en bevindingen uit twee andere recente onderzoekingen op dit gebied, m.n. het werk van Greeno c.s. op het terrein van aanvankelijke rekenvraagstukjes en de longitudinale studie van Carpenter & Moser. Laatstgenoemden hebben aangetoond dat jonge basisschoolleerlingen deze opgaven met een grote verscheidenheid van materiële en verbale strategieën oplossen. Verder ontdekten zij bij de aftrekvraagstukjes een systematische samenhang tussen de semantische structuurkenmerken van de opgaven enerzijds en de aard van de oplossingsstrategieën anderzijds, en wel in die zin dat elk aftrekvraagstukje het frequentst werd aangepakt met dit soort van strategieën, dat het nauwst aansluit bij de betekenisstructuur ervan. Op grond van onze onderzoeksresultaten kunnen we aan de analyse van Carpenter & Moser de volgende stellingen toevoegen: 1. niet enkel bij aftrekvraagstukjes, maar ook bij de optelopgaven wordt de aard van de materiële en verbale oplossingsstrategieën in belangrijke mate medebepaald door de semantische structuurkenmerken van het vraagstukje; 2. het verband tussen de semantische structuurkenmerken van de opgaven enerzijds en de aard van de strategieën waarmee ze opgelost worden anderzijds blijft bestaan wanneer de leerlingen op mentaal niveau tewerkgaan; 3. naast de semantische structuurkenmerken oefent wellicht ook de volgorde waarin de diverse gekende elementen uit het vraagstukje in de opgavetekst geïntroduceerd worden, een betekenisvolle invloed uit op de aard van de oplossingsstrategieën van jonge kinderen.

Om de oplossingsstrategieën te identificeren, maakten wij o.m gebruik van het retrospectieverslag van de leerling, eventueel aangevuld met zijn antwoord op bijkomende vragen van de interviewer (zie 3.1). Het is bekend dat velen bezwaar aantekenen tegen het aanwenden van zelfrapporteringstechnieken om denkprocessen op het spoor te komen. Wat de techniek van retrospectie betreft, kunnen de klassieke bezwaren in de volgende twee punten samengevat worden: 1. retrospectieprotocollen leveren slechts een partieel beeld op van het voorbije denkproces; 2. de betrouwbaarheid van retrospectieprotocollen is problematisch omdat hetgeen de proefpersoon meedeelt niet noodzakelijk beantwoordt aan de werkelijk gevolgde denkweg. De laatste jaren wordt door voorstanders van deze methoden meer en meer aandacht besteed aan de methodologische fundering ervan. Samengevat komt hun standpunt hierop neer dat men de vraag naar de wetenschappelijke waarde van gegevens verzameld via zelfrapporteringstechnieken, niet in het algemeen kan beantwoorden; of via deze methoden rijk, betrouwbaar en valied materiaal verkregen wordt, hangt af van vele factoren waaronder het soort taken of problemen waarmee gewerkt wordt en de aard van de instructies die door de proefleider gegeven worden (Ericsson & Simon, 1980; De Corte, 1984).

Tegen deze achtergrond kunnen voor de beoordeling van de waarde van onze kwalitatieve gegevens over het strategiegebruik van jonge kinderen bij aanvankelijke redactieopgaven, de volgende overwegingen gegeven worden. In de eerste plaats had het expliciteren van de gevolgde oplossingsweg in onze studie vaak slechts een aanvullende functie. Vooral tijdens de eerste en de tweede afname van het interview (begin en midden van het schooljaar) kon de strategie veelal reeds nauwkeurig achterhaald worden via het observeren van de uitwendige oplossingshandelingen van het kind. Ten tweede werd hier aan de leerling niet gevraagd om het volledige denkproces weer te geven, doch enkel dit onderdeel eruit waarvoor de kans op een betrouwbare zelfrapportering zeer groot is, nl. hoe hij/zij tewerkgegaan was bij de uitvoering van de gekozen oplossingsstrategie. Aan het kind werd niet gevraagd om een beschrijving te geven van de processen die tussengekomen waren gedurende de opbouw van de interne probleemrepresentatie en tijdens *de keuze van* de gebruikte oplossingsstrategie. Dat wij de retrospectie van de leerling richtten op de uitvoeringswijze van de oplossingsstrategie heeft hiermee te maken dat wij betwijfelen of door middel van deze techniek ook betrouwbare informatie bekomen kan worden over de daaraan voorafgaande fasen uit het oplossingsproces (zie ook Ginsburg e.a., 1983, p. 28). Ten derde hadden de retrospectie en de eventuele vragen van de interviewer geen betrekking op allerlei details van de toegepaste oplossingsstrategie, maar alleen op de globale structuur ervan. Wanneer een leerling een vraagstukje opgelost had door het vormen en combineren van groepen blokken, vroeg de interviewer bijvoorbeeld achteraf niet hoe hij/zij tewerkgegaan was bij het construeren van de afzonderlijke sets ('Heb je die groep blokken ineens gevormd of heb je daarbij in jezelf geteld?'). Samen met Ginsburg e.a. (1983, p. 21) zijn we van oordeel dat zelfrapporteringstechnieken niet geschikt zijn voor een dergelijke 'moleculaire' analyse van het oplossingsproces, maar eerder voor een globale, 'molaire' benadering.

Tot slot menen we dat de bevindingen uit onderhavige studie ook relevant zijn voor de praktijk van het aanvankelijk rekenonderwijs in het algemeen en voor het onderricht in het oplossen van eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes in het bijzonder. In de eerste plaats zijn dergelijke overzichten en beschrijvingen van kinderlijke oplossingsstrategieën informatief voor vakdidactici en practici die het aanvankelijk rekenonderwijs willen optimaliseren. Immers, het bewustzijn van het feit dat jonge basisschoolleerlingen aanvankelijke rekenopgaven oplossen via zeer verschillende strategieën, waarvan er vele nooit expliciet onderwezen werden, evenals een behoorlijke bekendheid met deze bonte verscheidenheid, zijn o.i. absolute voorwaarden om goed rekenonderwijs te kunnen verstrekken. Ten tweede noopt het onderzoeksgegeven dat diverse opgavekenmerken die geen weerslag hebben op de formeel-wiskundige structuur van de opgaven, maar toch effect hebben op de aard van de rekenhandelingen en de moeilijkheden van leerlingen, opstellers van rekenmethoden en leerkrachten ertoe omzichtig tewerk te gaan bij het opstellen van aanvankelijke rekenvraagstukjes. Ten derde kan op basis van de voormelde onderzoeksresultaten kritiek uitgeoefend worden op het traditioneel aanvankelijk rekenonderwijs in het algemeen en op de plaats en functie van eenvoudige redactie-opgaven daarbinnen in het bijzonder. Momenteel vervullen zij veelal louter een *toepassingsfunctie:* men wacht ermee tot de leerlingen de formeel-wiskundige basisbewerkingen optellen en aftrekken beheersen en biedt ze dan aan met het doel de leerlingen de aangeleerde rekenoperaties op een inzichtelijke wijze te leren toepassen in allerhande probleemsituaties. Zowel uit onderhavige studie als uit andere recente onderzoekingen komt echter naar voren dat jonge kinderen, die nog geen formeel rekenonderricht ontvangen hebben over de optel- en de aftrekoperatie, toch reeds behoorlijk in staat zijn om vraagstukjes die rond deze rekenkundige bewerkingen zijn opgebouwd, tot een goed einde te brengen; zij maken daarvoor gebruik van informele strategieën die nauw aansluiten bij de betekenisstructuur van deze opgaven. Op grond van deze bevinding vragen wij ons af of het niet beter zou zijn om bij het aanvankelijk rekenen veel vroeger vraagstukjes in te schakelen. Alzo zouden zij een nieuwe functie kunnen krijgen in het onderwijs, nl. niet meer als toepassing van de eerder geleerde formeel-wiskundige operaties, maar als middel om een diepere en vooral bredere betekenis te geven aan deze bewerkingen (De Corte & Verschaffel, 1984c; zie ook Carpenter & Moser, 1982, p. 9). Een gelijkwaardige suggestie met betrekking tot het leren vermenigvuldigen en delen, wordt gegeven door Treffers, Ter Heege & Dekker (1981/82, p. 86). Samen met deze auteurs zijn we echter van oordeel dat redactie-opgaven hun introductie- en/of toepassingsfunctie wellicht het best vervullen, wanneer zij niet (altijd) gepresenteerd en geformuleerd worden in de vorm van klassieke schoolvraagstukken – zoals in onderhavige studie het geval was –, maar (ook) als context-opgaven. Laatstgenoemde onderscheiden zich van gewone vraagstukken doordat de teksten niet geconstrueerd zijn volgens een vast stramien, de probleemstelling meer uitdagend is en de leerling bij het oplossen ervan zijn kennis van de alledaagse werkelijkheid niet 'tussen haakjes' hoeft te zetten, doch ze integendeel goed kan gebruiken (Treffers & Goffree, 1982).

Literatuur

Carpenter, T. P., *The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada, April 1983.

Carpenter, T. P., J. Hiebert & J. M. Moser, The effect of problem structure on first-grader's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1981, *12,* 27-39.

Carpenter, T. P. & J. M. Moser, The development of addition and subtraction problem-solving skills. In: T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1982, p. 2-24.

Corte, E. De, Kwalitatieve gegevens in onderwijsonderzoek. In: L. F. W. De Klerk & A. M. P. Knoers (Eds), *Onderwijspsychologisch onderzoek.* (Bijdragen tot de Onderwijsresearchdagen 1984). Lisse: Swets & Zeitlinger, 1984, p. 6-26.

Corte, E. De & L. Verschaffel, Representatieproblemen van jonge kinderen bij aanvankelijke redactie-opgaven. In: E. De Corte & P. Span (Eds), *Studies over onderwijsleerprocessen. Bijdragen aan een symposium ter gelegenheid van tien jaar Belgisch-Nederlandse samenwerking.* Leuven: Helicon, 1983, p. 33-58.

Corte, E. De & L. Verschaffel, Een analyse van de representatieprocessen van beginnende eersteklassertjes bij eenvoudige optel- en aftrekvraagstukjes. In: P. Vos, K. Koster & J. Kingma (Eds), *Rekenen. Balans van standpunten in theorievorming en empirisch onderzoek.* Lisse: Swets & Zeitlinger, 1984a, p. 74-94.

Corte, E. De, L. Verschaffel, *Empirische toetsing van computermodellen over denkprocessen van jonge kinderen bij aanvankelijke redactie-opgaven.* Lezing gehouden op het Leuvens-Nijmeegs Symposium over Onderwijsleerprocessen, Leuven, juni 1984b.

Corte, E. De & L. Verschaffel, Redactie-opgaven in Vlaamse rekenmethoden voor de eerste klas. In: E. de Moor (Ed.), *Methoden en reken/wiskunde-onderwijs. Panama cursusboek 2.* Utrecht: Stichting Opleiding Leraren – Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum, 1984c, p. 17-23.

Dahmus, R. M., How to teach verbal problems. *School Science and Mathematics,* 1970, *70,* 121-138.

Ericsson, K. A. & H. A. Simon, Verbal reports as data. *Psychological Review,* 1980, *87,* 215-251.

Ginsburg, H., N. E. Kossan, R. Schwartz & D. Swanson, Protocol methods in research on mathematical thinking. In: H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press, 1983, p. 7-47.

Heller, J. I., *Understanding in arithmetic word problem solution.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, Mass., April 1980.

Heller, J. I. & J. G. Greeno, *Semantic processing of arithmetic word problem solving.* Paper presented at the Meeting of the Midwestern Psychological Association, Chicago, May 1978.

Riley, M. S., J. G. Greeno & J. I. Heller, Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In: H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press, 1983, p. 153-196.

Treffers, A. & F. Goffree, 'Inzicht' in BOVO-toetsen voor rekenen. *Nieuwe Wiskrant,* 1982, *2,* 42-47.

Treffers, A., H. Ter Heege, A. Dekker, Het stomste vak ter wereld (2). *Willem Bartjens,* 1981/82, *1,* 81-88.

Verschaffel, L., *Representatie- en oplossingsprocessen van eersteklassers bij aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken. Een theoretische en methodologische bijdrage op basis van een longitudinale, kwalitatief-psychologische studie.* (Niet-gepubliceerd doctoraatsproefschrift). Leuven: Seminarie voor Pedagogische Psychologie, Faculteit der Psychologie en Pedagogische Wetenschappen, K.U. Leuven, 1984.

Curricula vitae

E. de Corte (1941), doctor in de pedagogische wetenschappen (1970), gewoon hoogleraar aan de K.U Leuven in het Departement Pedagogische Wetenschappen, Afdeling Didactiek en Psychopedagogiek met als voornaamste onderwijsopdrachten pedagogische psychologie (bij pedagogiek- en psychologiestudenten) en didactiek (in de lerarenopleiding).

Adres: Pedagogisch Instituut, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven.

L. Verschaffel (1957) behaalde in 1979 het diploma van licentiaat in de pedagogische wetenschappen aan de K.U. Leuven; promoveerde in 1984 op 'Representatie- en oplossingsprocessen van eersteklassers bij aanvankelijke redactie-opgaven over optellen en aftrekken'; is aangesteld-navorser bij het Belgisch Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek.

Adres: Pedagogisch Instituut, Vesaliusstraat 2, B-3000 Leuven.

Manuscript aanvaard 9-10-'84.

Summary

Corte, E. De & L. Verschaffel. 'First graders' solution strategies of simple addition and subtraction word problems.' *Pedagogische Studiën,* 1985, *62,*125-138.

The present study is part of a research project on the development of children's ability to solve elementary arithmetic problems. In one longitudinal investigation empirical data were collected on the problem representations and solution strategies of thirty first graders who were given a series of simple addition and subtraction word problems; the children were individually interviewed three times during the school year (Verschaffel, 1984). In this article some data on children's solution strategies and on the influence of the problem structure on those strategies are presented. The results are compared with the findings of other recent research, especially with those reported by Carpenter & Moser (1982).