Geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering*

A. TREFFERS
Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Onderwijs Computercentrum, R.U. Utrecht

Samenvatting

De verhandeling over geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering is een vervolg op twee artikelen in dit tijdschrift. Na een inleiding over de relatie cijferen-hoofdrekenen in verband met de ontwikkeling van zakrekenmachientjes en zakcomputers, worden de kenmerken van de progressieve schematisering beschreven aan de hand van cijferend vermenigvuldigen en delen. Aldus ontstaat een beeld van de specifieke trekken van deze cijferaanpak gesteld tegen de achtergrond van het gangbare geïsoleerde cijferen volgens progressieve complicering. Vervolgens worden de onderzoeksgegevens over de resultaten van het onderhavige cijferen gepresenteerd. En we eindigen met een samenvatting van deze Wiskobas-leergang.

1 *Inleiding*

De eerste artikelen waarin op grond van 'technologische' argumenten (zakrekenmachine en zakcomputer) afschaffing van het leren cijferen wordt bepleit, zijn reeds gepubliceerd. De eerste onderwijsgevenden die hun leerlingen geen rekenen 'onder elkaar' meer leren, hebben zich al gemanifesteerd. De eerste studenten van de Pedagogische Academie die geen staartdeling hebben leren maken, zijn onlangs gesignaleerd. Het gangbare cijferonderwijs staat ter discussie. Zelfs meer dan dat!

Toch is het zeker ook in Nederland nog niet zo dat er in brede kring aan het cijferen getornd wordt. Wel valt te verwachten dat de druk op de afschaffing ervan in de nabije toekomst zal toenemen.

Zo bevat het invloedrijke Amerikaanse geschrift 'An agenda for action. Recommendations for School Mathematics of the 1980's' (N.C.T.M. 1980) enkele aanbevelingen die daarvoor spreken: *'Insisting that students become highly facile in paper and pencil computations such as 3841 × 937 or 72509 : 29,3 is time-consuming and costly.' 'For most complex problems, using the calculator for rapid and accurate computation makes a far greater contribution to functional competence in daily life.'* (p. 6)

En ook het veelbesproken Engelse Cockcroft-rapport drukt zich op soortgelijke wijze uit (Cockcroft, 1982).

Kortom, het is niet denkbeeldig dat het cijferen in het toekomstige reken/wiskunde-onderwijs een minder dominerende, althans een wat andere positie zal innemen dan thans het geval is. Welke die plaats is, blijft echter nogal onduidelijk. Er wordt gesuggereerd dat er meer aan hoofdrekenen en minder aan cijferen gedaan moet worden. Maar wat betekent 'minder' in dit verband: minder oefenopgaven maken, minder complexe opgaven aanbieden, minder vaardig cijferen accepteren?

Wat dat aangaat is de hoofdrekenbeweging duidelijker: schaf het cijferen af en stel daar flexibel rekenen en schatten voor in de plaats (Plunkett, 1979; Papert, 1980; Levin, 1981). Immers: waarom zouden we zoveel tijd en energie aan het aanleren van de cijferprocedures besteden als kinderen over zakrekenmachientjes en zakcomputers beschikken? – zo heet het.

In (vrijwel) alle discussies en beschouwingen gaat het om een tweestrijd tussen hoofdrekenen en cijferen als zijnde twee duidelijk onderscheiden opponenten, het is of dit of dat, en soms een beetje van beide.

We zullen in dit artikel proberen aan te tonen dat deze dichotomie niet correct is en dat er wel degelijk een derde weg bestaat, namelijk die van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering, welke zeer wel bij

* De auteur draagt dit artikel op aan prof. dr. J. Sixma ter gelegenheid van zijn 65ste verjaardag onder dankzegging voor zijn werkzaamheden ter bevordering van het reken-wiskunde-onderwijs.

mogelijk nieuwe doelstellingen van het reken/wiskunde-onderwijs aansluit. De algemene conceptie ervan is reeds tientallen jaren geleden in globale zin door Kuhnel en Wertheimer beschreven. Maar een gedetailleerde didactische uitwerking ervan voor het cijferonderwijs als geheel is pas recent door de Wiskobas-groep ontwikkeld.

In dit artikel zullen we eerst de kenmerken van deze nieuwe cijferaanpak beschrijven en dan de onderzoeksresultaten ervan. We stellen een en ander tegen de achtergrond van het traditionele rekenkundige cijferonderwijs en het gangbare wiskundige cijferen waaraan reeds twee artikelen in dit tijdschrift werden gewijd (Treffers, 1982a; 1982b).

2 *Leerstofordening volgens progressieve schematisering*

Eerder is via voorbeelden van cijferend optellen en aftrekken getoond hoe in het gangbare wiskundige cijferen de voortgaande schemat sering en verkorting van de cijferhandelingen wel per deelgeval maar niet voor de leergang als totaal worden aangevat. Zo voeren kinderen eerst een aftrekking van twee getallen met twee cijfers 'onder elkaar' uit met behulp van positie-blokken of op een abacus, vervolgens met alleen een positieschema, en tenslotte zonder hulp van materialen of schema's op de standaardmanier met direct lenen. Pas als dit soort twee-bij-twee aftrekkingen op standaardniveau beheerst wordt, komt het volgende wat meer gecompliceerde deelgeval van bijvoorbeeld drie-bij-drie termen aan bod en herhaalt zich de cyclus van de progressieve schematisering op micro-niveau. De macro-ordening van de leergang wordt echter door de complexiteit van de opgaven bepaald. Vandaar dat we het gangbare onderwijs typeren als cijferen volgens progressieve complicering per deelgeval naar de standaard-algoritme leidend (Resnick, 1982).

Leren cijferen volgens progressieve schematisering vormt hiervan het contrastbeeld. De deelgevallen worden nu niet meer zover in de tijd uitgestreken waardoor vrijwel vanaf het begin van de leergang met relatief grote getallen gerekend wordt. Maar de kinderen maken de opgaven dan wel op een aangepast niveau van schematisering en verkorting, zonodig met hulp van positiemateriaal of positieschema's en mogelijk zonder direct inwisselen of lenen. Later worden dezelfde opgaven zonder positiemateriaal berekend, korter genoteerd en sneller uitgerekend. Kortom, een dergelijk opgezette leergang is in grote lijnen door voortschrijdende schematisering en verkorting bepaald, en niet zozeer door de mate van complexiteit van de opgaven (Bennedbek, 1981). De loop van de leergang kan aldus per kind verschillen, terwijl ook de nagestreefde eindvormen niet voor alle kinderen gelijk hoeven zijn – althans voor vermenigvuldigen en delen. Dit alles betekent dat men aan een heterogeen samengestelde groep dezelfde problemen kan geven, welke dan qua cijferprocedures gedifferentieerd worden opgelost.

Voor *cijferend vermenigvuldigen* verloopt de progressieve schematisering als volgt. Als startprobleem nemen we:

> ' *Sinterklaas geeft acht zwarte pieten opdracht cadeautjes rond te brengen in een dorp. In elke zak zitten 23 pakjes. Hoeveel cadeautjes zijn dat bij elkaar?*'

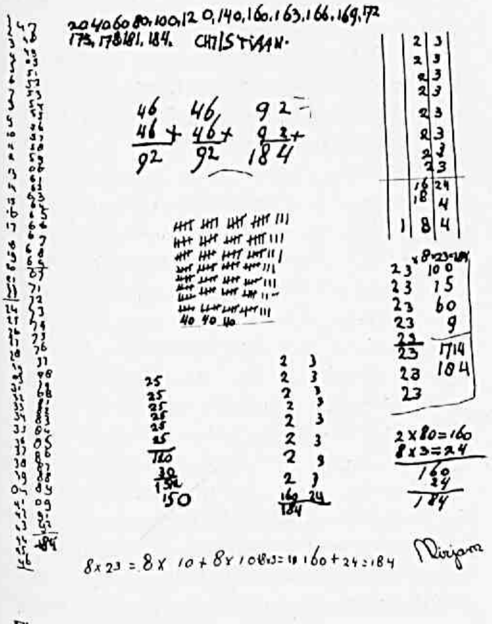
De meeste kinderen lossen deze opgave aan het begin van het derde leerjaar via herhaald optellen op, maar dan wel in vele varianten:
- de herhaalde optelling wordt uitgerekend zonder gebruik te maken van de reeds geleerde tafelprodukten: $23 + 23 = 46$; $46 + 23 = 69$; $69 + 23 = \ldots$;
- de herhaalde optelling wordt uitgevoerd met tafels of tafelsprongen: $20 + 20 + 20 \ldots$, en $3 + 3 + 3 \ldots$; $160 + 24 = 184$;
- een tussenvorm is het uitrekenen van deelopgaven al dan niet met gebruik van tafels: 8×23 via 5×23 en 3×23; of via 8×10, 8×10 en 8×3;
- er worden verdubbelingsmethoden gebruikt: $23 + 23 = 46$; $46 + 46 = 92$; $92 + 92 = 184$ en allerlei varianten hiervan voor deelberekeningen als $80 + 80 = 160$; $160 + 24 = 184$; of $23 + 23 + 23 + 23 = 92$; $92 + 92 = 184$;
- en nog allerlei andere tel- en rekenstrategieën, zoals het afpassen van 8×23 op een lange getallenlijn, en de kwartjesmethode van '$8 \times 25 - 8 \times 2$', al dan niet met gebruik van tafels (zie bijvoorbeeld Hutton, 1977; Ter Heege, 1978).

In Fig. 1 staat een collage van 10 verschillende oplossingen van een dergelijk probleem uit een klas in het begin van het derde leerjaar, waarin men de genoemde werkwijzen kan herkennen.

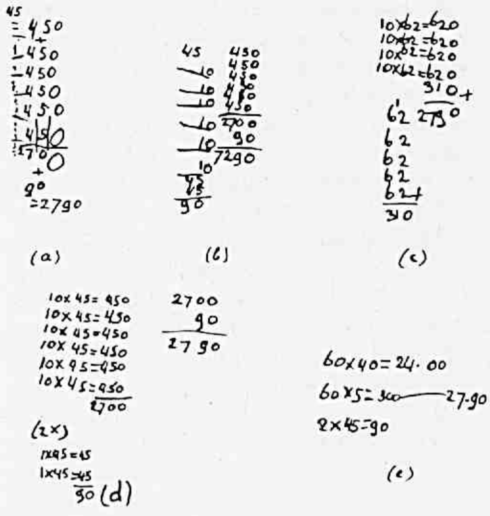
Bij het uitrekenen van dit soort vraagstukken komen de kinderen er allengs achter dat het handig is om de lange herhaalde optelling middels het gebruik van tafels op te lossen. Vooral ook het rekenen met tientallen '8 × 20' e.d. spreekt ze aan. En wellicht nog sprekender is het nemen van 'happen' van tien termen bij opgaven als '12 × 23', '21 × 23', '82 × 45'. De kinderen nemen die happenstrategie nadat hij door enkele kinderen ontdekt is, vrijwel meteen over.

Er wordt dus in het begin van de leergang aangesloten op de diverse additieve en gedeeltelijk multiplicatieve methoden die de kinderen bij eenvoudige contextproblemen hanteren, en vervolgens wordt het gebruik van twee handige strategieën gestimuleerd: tafels gebruiken en happen van tien nemen. Aldus wordt de weg naar de standaardalgoritme op een natuurlijke wijze ingeslagen: de kinderen nemen de handige rekenwijzen over omdat ze ten eerste aansluiten op hun deels informele additieve strategieën en ten tweede voor hen overtuigend de handigste manieren van oplossen zijn.

Zo wordt een probleem als: '*In een adresboek van 62 bladzijden staan op iedere pagina 45 namen; hoeveel namen staan er in het hele boek*?' door de meeste kinderen nu als volgt opgelost: 45 + 45 + 45 + . . ., onder elkaar



Figuur 1 *Contextprobleem '8 × 23'*



Figuur 2 *Vermenigvuldiging '62 × 45'*

'in gedachten' genoteerd als een lange streep in de lucht (handbeweging), uit die kolom van 62 termen worden zes happen van tien termen genomen en opgeschreven, met daaronder nog twee termen, waarna de deeluitkomsten handig worden opgeteld door gebruik te maken van de tafels.

We tonen in Fig. 2 het werk van vijf leerlingen uit het derde leerjaar die vijftien lessen in zo'n leergang cijferend vermenigvuldigen volgens progressieve schematisering gevolgd hebben (Dekker, Ter Heege en Treffers, 1982, p. 50 e.v.) In de eerste werkwijze zien we nog duidelijk de gedachtensporen van de lange optelling-in-de-lucht op het papier neergezet; 62 termen opgedeeld in zes happen van tien termen en nog twee. Ook de laatste restanten van de positiestrepen die de plaatswaarden markeren, zijn nog waarneembaar in Fig. 2(a).

De werkzijze afgebeeld in Fig. 2(b) verschilt niet veel van de vorige. Alleen worden hier de happen van 10 × 45 nog expliciet aangegeven. (Of moeten we in plaats van 'nog' juist 'al' zeggen?) De verwisseling van de cijfers (7290 in plaats van 2790) wordt kennelijk niet gecorrigeerd door een globale schatting-vooraf.

In Fig. 2(c) wordt de commutatieve eigenschap toegepast, wellicht uit gewoonte, of om sneller te rekenen, of anderszins. Bij het inwisselen wordt het te onthouden getal boven aan de kolom genoteerd. De deeluitkomsten van '4 × 620' en '5 × 62' worden niet eerst beide apart uitgerekend. Dit nu kan later als we naar de standaardalgoritme willen toewerken een handicap gaan vormen: de tafelprodukten worden op deze manier niet voldoende benut – correctie door de onderwijsgevende kan nu geboden zijn.

De aanpak van Fig. 2(d) heeft zich evenals die van 2(c) qua notatiewijze van de lange optelling losgemaakt. De wijze van opschrijven is overzichtelijk en de deeluitkomsten worden eerst gescheiden uitgerekend en dan samengevoegd. De volgende fase welke zich hier aandient is die van het direct uitrekenen en noteren van '60 × 45'.

Tenslotte zien we in Fig. 2(e) een verregaand verkorte rekenwijze. Mede door het zich realiseren van de lange optelling worden bepaalde eigenschappen handig gebruikt. Een opmerkelijk hoog niveau voor een achtjarige!

Wat is het getoonde werk opvalt is:

- de kinderen vermenigvuldigen al na vijftien lessen met relatief grote getallen;
- ze werken op verschillende niveaus van schematisering en verkorting;
- en hanteren daarbij aangepaste notatiewijzen.

De volgende fase in de leergang kan bestaan in het samennemen van de tientallen, dus het direct noteren en uitrekenen van '60 × 45' via '6 × 450' met ineens inwisselen van de deeluitkomsten. In feite zijn we dan al bijna bij de standaardvorm beland.

Ziehier een grove schets van vermenigvuldigen volgens progressieve schematisering. De leergang wordt wellicht het meest exact met de term 'staartvermenigvuldiging' getypeerd. De staart is het aanhangsel van de deels additieve werkwijzen die veelal door kinderen bij het oplossen van ingewikkelde vermenigvuldigingsopgaven gevolgd worden (Hutton, 1977; Hart, 1981). Vanaf dit natuurlijke startpunt van de lange herhaalde optelling vertrekt de leergang en voltrekt zich de voortschrijdende schematisering en verkorting van de rekenwijze: de staart wordt steeds verder gecoupeerd.

Bij de *staartdeling* als pendant hiervan, doet zich iets soortgelijks voor, maar dan met het herhaalde aftrekken (of zo men wil, het herhaalde op-tellen): een beetje-bij-beetje verdeling levert aanvankelijk een lange staart op, maar door het afnemen van grotere happen (i.c. tientallen, honderdtallen, . . .) wordt de staart ingekort.

We beschouwen de progressieve schematisering van de delingsalgoritme in grote lijnen vanuit het gezichtspunt van de voorbeeldopgave '324 : 4'. Hoe lost een kind dit probleem in verschillende fasen van de leergang op?

Als inkleding kiezen we het volgende probleem:

' *Verdeel 324 lucifersmerken onder vier kinderen (Sjoerd, Bauke, Bart en Jan); hoeveel krijgt ieder?*'

Fase 1: de verdeling wordt concreet uitgevoerd: eerst met uitdelen per stuk, maar al snel worden grotere gelijke hoeveelheden uitgedeeld.

Fase 2: het verdelen gebeurt 'mentaal' en wordt op papier in een schema genoteerd volgens het principe uitdelen – hoeveel blijft over? – opnieuw uitdelen – hoeveel over? – . . .

	Sjoerd	Bauke	Bart	Jan
324				
40	10	..	..	..
—				
284				
40	10	..	..	..
—				
244				
..	..	..	..	..

Fase 3: de happen worden groter en de notatiewijzen verder geschematiseerd en verkort. Het afschatten van zo groot mogelijke happen en het uitrekenen ervan:

324	
200	50
—	
124	
120	30
—	
4	
4	1
—	—
0	81

Fase 4: het maximale aantal tienen en eenheden wordt per ronde verdeeld – althans zo goed mogelijk volgens schatting; foutjes kunnen bijgesteld worden. De notatie gaat nog wat verder naar de standaardvorm toe.

$$\begin{array}{rr} 4\overline{)324} & \\ 320 & 80 \\ \hline 4 & \\ 4 & 1 \\ \hline 0 & 81 \end{array}$$

Hoever het couperen van de staart moet gaan, staat niet op voorhand vast: het inkorten hoeft niet per se in de standaardalgoritmen uit te monden (voor elke leerling). Men zou bijvoorbeeld bij het vermenigvuldigen de werkwijze van Fig. 2(d) als eindvorm kunnen kiezen en bij het delen in fase 3 eindigen (let wel: 'kunnen' niet 'moeten'). Dit nu vormt mede een belangrijk verschil met het gangbare cijferen volgens progressieve complicering[1].

3 *Cijferen geïntegreerd met toepassen en handig rekenen*

Naast de progressieve schematisering welke zojuist in de gegeven voorbeelden van '62 × 45' en '324 : 4' tot uitdrukking kwam, trekt vooral ook de specifieke rol die *contextproblemen* bij de opbouw van de onderhavige cijferleergangen spelen sterk de aandacht – een rol die fundamenteel afwijkt van het thans gangbare patroon. Daarom eerst enkele opmerkingen over het vigerende cijferonderwijs.

Globaal gesteld maken kinderen in de middenklassen 10.000 enkelvoudige rekenopgaven. Deze zijn te verdelen in 3.000 cijfersommen 'onder elkaar', 5.000 (hoofd-)rekensommen 'naast elkaar' en 2.000 opgaven over tijd, geld en metriek stelsel (Treffers, 1981). Aangezien de cijfersommen per stuk veel meer tijd in beslag nemen dan de overige opgaven, kan grofweg aangenomen worden dat cijferen meer dan de helft van de beschikbare rekentijd in de middenklassen beslaat – cijferen met 'kale' sommen wel te verstaan, want het aandeel van verhaaltjessommen of contextproblemen waarin grote vermenigvuldigingen en delingen vervat liggen – om ons hiertoe te beperken – kan in het traditionele rekenonderwijs het beste in promillages uitgedrukt worden.

Bij het gangbare wiskundige cijferen liggen de verhoudingen wat anders: hier zien we vaak een klein aantal kale oefenopgaven en wat meer toepassingen van de cijferprocedures in de vorm van verhaaltjessommen of contextproblemen. Maar principieel beschouwd staan ook hier de kale cijferopgaven centraal. Voorzover er al van toepassingsproblemen sprake is, zijn het toepassingen-achteraf van eerder via 'kale' sommen aangeleerde cijferprocedures. Anders gezegd: contextproblemen (toepassingen) vormen in het gangbare rekenkundige en wiskundige cijferonderwijs als regel geen uitgangspunt voor het leren van cijferprocedures, zoals dat in de hier beschreven opzet – gelet op de eerder genoemde sinterklaas- en adressenboekproblemen – juist wel het geval blijkt te zijn.

De vraag is echter allereerst of de traditionele werkwijze van weinig-toepassingen-maken en dan ook nog slechts met toepassingen-achteraf niet voldoet. In een vorig artikel (Treffers, 1982b) hebben we de resultaten ervan beschreven – we vatten ze samen.

Uit tal van recente onderzoeken is komen vast te staan dat aan het einde van de basisschool meer dan éénderde deel van de kinderen geen optimaal gebruik maakt van de geleerde cijferprocedures bij het oplossen van enkelvoudige verhaaltjes-opgaven (Hart, 1981). En dat niet omdat ze de tekst niet zouden begrijpen, maar eenvoudigweg omdat ze niet in staat zijn om met name de vermenigvuldigingen en delingen die in de opgaven besloten liggen, te identificeren[2]. Ze hanteren met andere woorden bij het oplossen van contextopgaven informele methoden die niet op de formele cijferprocedures aansluiten, hetgeen overigens niet inhoudt dat ze een onjuiste strategie volgen en derhalve een verkeerde uitkomst krijgen. Wel betekent het vaak dat ze omslachtig te werk gaan en de opgedane cijfervaardigheid onvoldoende benutten. Ze kunnen de zakrekenmachientjes dan echter evenmin adequaat gebruiken. Kortom, de kwestie van de toepasbaarheid van basisoperaties en cijferprocedures wordt in het gangbare reken/wiskunde-onderwijs schromelijk verwaarloosd. Anders gezegd: er wordt teveel tijd aan het kale cijferen besteed, en te weinig aan het oplossen van contextproblemen. Het is echter niet alleen een kwestie van 'meer' of 'minder', maar vooral van 'anders'.

'Anders' cijferen wil in dit verband zeggen: geïntegreerd cijferen. We hebben straks een indicatie gegeven hoe zo'n vervlechting van cijferen met toepassingen kan gebeuren: op alle belangrijke markeringspunten fungeren contextopgaven als aanjager voor schematisering en verkorting. Zulke markeringspunten zijn voor het vermenigvuldigen contextopgaven waarin bijvoorbeeld '8 × 23', '12 × 35', '62 × 45', '102 × 332' besloten liggen; en voor het delen '24 : 4', '324 : 4', '324 : 14'. De bedoeling van dit gebruik van contextopgaven bij het cijferen is tweeledig, te weten het bevorderen van het leren van de cijferprocedures op zich, maar ook het verhogen van de toepasbaarheid ervan.

Het leren cijferen wordt namelijk door reële contextproblemen vergemakkelijkt omdat de kinderen zich bij het uitvoeren van de cijferhandelingen iets concreets voorstellen en de toepasbaarheid vergroot vanwege de organische verbinding die van het begin af aan tussen de formele rekenkundige procedures en de informele kinderlijke oplossingswijzen van contextproblemen gelegd wordt – aldus luidt kort samengevat de gedachtengang achter het geïntegreerde cijferen. (Op de feitelijke houdbaarheid van deze conceptie gaan we later in).

De kwalificatie 'geïntegreerd' slaat echter niet alleen op de relatie cijferen-toepassen maar evenzeer op de betrekking tussen cijferen en *flexibel rekenen*.

Hoezeer cijferen en flexibel rekenen verweven zijn, blijkt uit de eerder gegeven voorbeelden '65 × 45' en '324 : 4': de oplossingsmethoden zijn gedifferentieerd; de ene aanpak is handiger dan de andere. 'Handiger' wil onder meer zeggen dat gebruik is gemaakt wordt van bepaalde eigenschappen, zoals de commutatieve regel in de oplossing bij Fig. 2(c) en de distributieve wet in 2(e) en van het (af-)schatten wat overigens juist niet gebeurde in 2(b), en voorts van het handig kunnen rekenen met 'nullen'.

Maar dat is dan wel handig rekenen binnen de perken van de cijferprocedures. Er is echter ook nog een ander soort handig rekenen. Neem de vermenigvuldiging '62 × 45'. Deze kan ook langs de volgende weg vlug uitgerekend worden:

$62 \times 45 = 31 \times 90 = 90 \times 31 = 9 \times 310 = \ldots$

Dit is echter slechts dan een verkorting als de kinderen '9 × 310' uit het hoofd kunnen uitrekenen, dus met direct inwisselen – en zover zijn ze veelal nog niet na vijftien lessen. Wel is vanuit de lange optelling de verdubbeling-halvering-regel '62 × 45 = 31 × 90' heel inzichtelijk voor kinderen. Dus op wat langere termijn kan de geschetste aanpak zeker benut worden. En ook een 'trucje' als '99 × 112 = 100 × 112 − 1 × 112' is vanuit herhaald optellen doorzichtig. Dit handig rekenen is echter niet direct cijfermatig en valt als zodanig buiten het cijferen.

Nu is kenmerkend voor het geïntegreerde cijferen dat naast het schatten-vooraf van de uitkomst en het handig rekenen binnen het raam van de cijferprocedures, ook steeds aandacht aan dergelijke niet-(geheel)-cijfermatige berekeningen gegeven wordt.

Deze inklemming van het cijferen tussen schatten en flexibel rekenen is mede bedoeld om een uitsluitend op algoritmen gerichte attitude tegen te gaan. Juist in de middenklassen, waarin het onderwijs vaak zozeer door het regelgeleide handelen van het cijferen bepaald wordt – althans in de gangbare aanpak – is het gevaar voor de vorming van een anti-wiskundige attitude verre van denkbeeldig. (Zie voor de attitude-problematiek bijvoorbeeld Erlwanger, 1973, 1975 en voor de relatie cijferen-handig rekenen-toepassen Brown, 1982).

4 *Onderzoek*

We bespreken eerst de *staartdeling*.

Wat zijn de resultaten van het gangbare onderwijs? Biedt de geïntegreerde aanpak een bruikbaar alternatief? Dit zijn de twee vragen die hier aan de orde gesteld worden.

We vatten nu eerst de onderzoeksresultaten van het gangbare cijferonderwijs met betrekking tot de staartdeling kort samen.

Ten eerste wordt de staartdeling algemeen als de eerste grote hobbel in het rekenonderwijs aangemerkt: de algoritme levert voor bijna de helft van de kinderen grote problemen op (Foxman, 1980; Buxton, 1981; Laing en Meijer, 1982).

Ten tweede worden de resultaten van de staartdeling na de basisschool niet merkbaar beter (Hart, 1981; Laing en Meijer, 1982).

Ten derde wordt de staartdeling in toepassingssituaties lang niet altijd gebruikt: de kinderen hanteren vaak ook informele methoden (Hart, 1981; Brown, 1982).

We dienen hierbij in aanmerking te nemen dat de kinderen gedurende de leergang honderden 'kale' staartdelingen maken. Al met al bestrijkt het delings-cijferonderwijs twee schooljaren en vergt het zo'n zestig tot honderd lesuren.

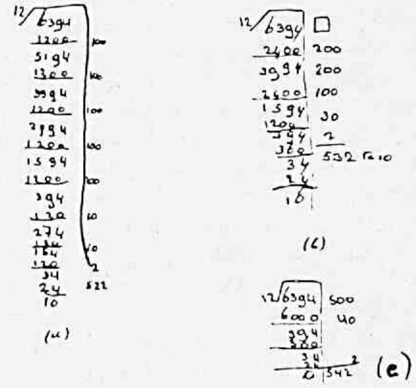
Is de geïnvesteerde tijd eigenlijk nog wel verantwoord, gelet op deze resultaten en ook de beschikbaarheid van zakrekenmachientjes in aanmerking nemend? Er is noch in Nederland, noch in het buitenland opinie-onderzoek naar deze kwestie verricht. Wel is het uit verschillende rapporten duidelijk dat het cijferonderwijs als geheel thans steeds meer ter discussie gesteld wordt (N.C.T.M., 1981; Cockcroft, 1982). En ook spreken individuele onderzoekers zich op niet mis te verstane wijze tegen het cijferen uit. Zo stelt Brown (1982) naar aanleiding van de resultaten van het 'Low Attainers in Mathematics'-project betreffende de basisalgoritmen: *'In these cases the proportion of children who could supply answers to the 'real-life' problems were in general rather greater than those who could perform the corresponding algorithm.'* (p. 457) *'Both these points would seem to argue for the priority to be shifted towards the application aspect and away from that of routine skills.'* (p. 459)

Nogmaals: is de geïntegreerde aanpak een bruikbaar alternatief? Dit zou het geval zijn, indien:

1. men de doelstelling aanvaardt dat kinderen in principe niet de meest verkorte eindvorm van de algoritmen voor vermenigvuldigen en delen zouden hoeven te leren,
2. er in de nieuwe opzet minder tijd aan het leren van de cijferprocedures besteed behoeft te worden,
3. meer kinderen in staat zullen zijn een of andere eindvorm van de betreffende algoritme te leren,
4. en de toepasbaarheid van de geleerde procedures vergroot wordt.

Wat de doelstelling betreft, lijkt zoals gezegd alles erop te wijzen dat men in het onderwijs niet per se aan de standaarduitvoeringen wil vasthouden. En het valt te verwachten dat in de nabije toekomst alleen maar een versterking van deze nieuwe tendens zal optreden – dit vooral onder invloed van technologische ontwikkelingen. Maar ook als men wel vindt dat de meest verkorte eindvorm nagestreefd moet worden is de geïntegreerde aanpak uiteraard bruikbaar – we komen daar zo nog op terug.

Aangaande de onderwijstijd kan opgemerkt worden dat uiteraard minder tijd nodig zal zijn indien men niet naar uitvoering van cijferalgoritmen op standaardniveau streeft. Hoeveel minder hangt af van het beoogde eindniveau. Een indicatie geeft het volgende. Na omstreeks vijftien lessen in de leergang delen, werken vele kinderen op niveaus als in Fig. 3 (Dekker, Ter Heege en Treffers, 1982, p. 167-168).



Figuur 3 *Deling '6394 : 12'*

Wil men nu met de hele groep naar het eindniveau van Fig. 3(c) dan zal het nog enkele tientallen lessen vergen voor het grootste deel van de kinderen zover zal zijn. Wenst men dan nog de laatste stap naar de standaardwerkwijze te zetten zoals die thans gangbaar is, dan komen daar zelfs nog een tiental lessen bovenop. Want het is bekend dat juist dergelijke omzettingen weer nieuwe problemen opleveren (Van Engen en Gibb, 1956; Kratzer en Willoughby, 1973; Suydam en Dessart, 1978; Laing en Meijer, 1982). Neemt men echter genoegen met gedifferentieerde werkwijzen als die van Fig. 3, dan is de leergang staartdelen na omstreeks twintig lessen beëindigd!

Dit brengt ons bij het derde punt, namelijk hoeveel kinderen in staat zijn een of andere eindvorm van de staartdeling te leren. Accepteert men de werkwijze van Fig. 3(a) als een soort minimum-niveau dan is duidelijk dat het beheersingspercentage aanzienlijk hoger zal liggen dan de omstreeks 60 procent van de kinderen die thans de staartdeling volledig beheersen. Anders gezegd: zwakke rekenaars worden met deze aanpak sterk geholpen. Ze hoeven namelijk niet direct goed 'af te schatten', maar kunnen veilig en eenvoudig honderdtallen en tientallen afnemen. Alleen wordt de staart dan wel wat langer. Nog anders gezegd: vrijwel iedere leerling kan 'een' staartdeling leren, terwijl 'de' staartdeling slechts door hooguit twee van de drie kinderen beheerst wordt (zie Dekker, Ter Heege en Treffers, 1982).

Tenslotte de kwestie van de toepasbaarheid van de geleerde staartdeling. Teule-Sensacq en Vinrich (1982) hebben op dit onderdeel zowel constaterend als construerend onderzoek verricht. Het constaterende deel van hun onderzoek wijst uit wat ook reeds in andere onderzoekingen naar voren kwam, namelijk dat kinderen bij delingsproblemen hoofdzakelijk de methode van herhaald optellen en herhaald aftrekken gebruiken. Zij constateren echter ook dat de multiplicatieve aanpak gestimuleerd wordt indien in contextopgaven met relatief grote getallen expliciet een beroep op het schatten wordt gedaan.

Dit gegeven wordt door de onderzoekers aangegrepen om construerend onderzoek te verrichten. Ze ontwikkelden een leergang-delen volgens de principes van het geïntegreerde cijferen naar progressieve schematisering, dezelfde dus als die bij Wiskobas[3]. Eerst krijgen kinderen schattingsopgaven als:

> *'Ik heb 2500 bonbons te verdelen over 23 kinderen. Schat eens hoeveel ieder kind krijgt. Omcirkel het getal dat er naar jouw schatting het dichtst bijkomt: 15 – 75 – 95 – 108 – 305. Ga na of het klopt!'*

De verificatie kan hier gebeuren door globaal rekenen met nullen e.d., maar evenzeer via een exacte berekening. Beide elementen zijn van belang. Uit de trits schatten-berekenen-corrigeren ontwikkelen de onderzoekers een notatieschema dat aansluit op de actuele werkwijzen van de kinderen, maar dat tevens een passende vorm voor de staartdeling biedt. Deze ziet er voor de deling '5725 : 42' als volgt uit (let op de overeenkomst met de Wiskobas-aanpak):

42 (deler)	5725 (deeltal)	
	5725	
42 × 100 = 4200	4200 –	100
	1525	
42 × 20 = 840	840 –	20
	685	
42 × 10 = 420	420	10
	265	
42 × 6 = 252	252	6
	13 rest	136 quotiënt

De ontwikkelde leergang, althans de aanzet daartoe, blijkt succesvol te zijn ten aanzien van het terugdringen van de additieve aanpak en het stimuleren van een multiplicatieve werkwijze bij het oplossen van contextopgaven waarin een deling vervat ligt: *'The repetition of drills of the same nature during the first learning sequence does not result in important variations as far as success and solution procedures are concerned.' 'On the other hand, during the second learning sequence all pupils use a more economical procedure with high level success rate.'*. (Teule-Sensacq en Vinrich, 1982, pag. 178)

Vrolijk onderzocht (1981) de start van de leergang delen volgens progressieve schematisering naar het globale ontwerp van Wiskobas in vergelijking met de leergang van de methode 'Nieuw Rekenen'. En haar conclusie luidt als volgt: *'De resultaten van de voortoets leiden tot de conclusie dat proefgroep en kontrolegroep als te vergelijken groepen konden worden beschouwd. Uit de resultaten van de natoets bleek, dat de proefgroep signifikant hoger scoorde dan de kontrolegroep. Dit resultaat zou te danken kunnen zijn aan het gebruik van het programma Cijferend Delen. De slotkonklusie van het onderzoek is dan ook, dat de invloed van het werken van het programma Cijferend Delen – in vergelijking met het werken volgens traditionele rekenmethoden – positief is wat betreft de toename van leerresultaat op het onderdeel Cijferend Delen.'* (pag. 188-189)

Dit onderzoek bevat echter geen gegevens over de leergang-delen in zijn totaliteit en over de toepasbaarheid van de staartdeling in vergelijking tot het gangbare cijferonderwijs. Op dit punt vindt thans voortgaand onderzoek plaats binnen de vakgroep Onderwijskunde van het I.P.A.W. (Utrecht) in samenwerking met de vakgroep OW & OC. Wel zijn er duidelijke indicaties in de vorm van ruw empirisch materiaal uit enige proefscholen. Daaruit kan men de hypothese destilleren dat ook de standaardalgoritme van de staartdeling via de werkwijze van de progressieve schematisering aanzienlijk sneller en effectiever geleerd kan worden dan met de gangbare cijferaanpak. Onderwijsgevenden schatten de tijdwinst in de orde van grootte van 50 procent, uitgaande van een einddoel voor ongeveer de helft van de kinderen op standaardniveau en de andere helft op het beheersingsniveau van voor-vormen daarvan – een beheersingsgraad die wat de standaardvorm betreft globaal overeenkomst met het thans gangbare cijferen en die voor de restcategorie van niet-standaardvormen een belangrijke toegevoegde waarde voor de zwakkere leerlingen biedt. Een nadeel van deze snelle leergang ligt echter in het feit dat kinderen aanzienlijk minder oefenopgaven hoeven te maken waardoor de basisvaardigheden (tafels e.d.) in de knel kunnen komen. Er moet in deze conceptie dus apart aandacht aan het inoefenen en op peil houden van die vaardigheden besteed worden. En de daarvoor benodigde tijd dient derhalve weer van de genoemde 50 procent tijdwinst afgetrokken te worden. Maar dan nog blijft er een aanzienlijke meer-opbrengst over – zo is de algemene indruk van ontwikkelaars en onderwijsgevenden (zie Dekker, Ter Heege en Treffers, 1982). Zoals gezegd, moeten deze ruwe ervaringsgegevens via onderzoek verder gezuiverd worden vooraleer meer definitieve uitspraken in dit opzicht gedaan kunnen worden.

Wat de staartdeling betreft blijft echter onverlet dat de geïntegreerde aanpak volgens progressieve schematisering een bruikbaar alternatief is indien men niet per se naar de standaardalgoritme streeft. En dat is op zich een belangrijk gegeven.

Nu nog kort enkele gegevens over het *vermenigvuldigen*. Het beheersingspercentage van de standaardalgoritme ligt in het gangbare cijferonderwijs aan het eind van de basisschool op omstreeks 70 procent van alle leerlingen (Bright, 1978; Foxman, 1980). Evenals bij het delen worden in de middenklassen in Nederland vaak omstreeks duizend 'kale' opgaven gemaakt; er wordt zo'n zestig à honderd lesuren aan gewerkt. De toepasbaarheid levert ook nu problemen op (Hart, 1981).

Hier kan men evenzeer de vraag stellen of het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering een bruikbaar alternatief biedt. En ook hier is een twee-ledig antwoord op zijn plaats, namelijk voor het geval de standaardvorm nagestreefd wordt of indien dat niet per se zo hoeft te zijn. In beide gevallen komen de gegevens en ervaringen overeen met hetgeen zojuist bij het delen vastgesteld is. Voor de niet-standaardvorm is het antwoord duidelijk 'ja', gelet ook op de oplossingen neergezet in Fig. 2 na vijftien lessen in de leergang. Wat het nastreven van de standaardvorm betreft, is voortgaand vergelijkend onderzoek noodzakelijk. Maar er zijn ook hier duidelijke indicaties van tijdwinst en groter rendement ten opzichte van het gangbare cijferend vermenigvuldigen te constateren (Hutton, 1977; Vink, 1978; Dekker, Ter Heege en Treffers, 1982).

Bij het *optellen* en *aftrekken* zijn de verschillen tussen het geïsoleerde cijferen volgens progressieve complicering en het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering niet zo sprekend als bij het vermenigvuldigen en delen (De Jong, 1977). Ten eerste niet omdat de toepasbaarheid van de algoritmen minder problematisch is, waardoor 'geïsoleerd' versus 'geïntegreerd' een minder belangrijke tegenstelling vormt. Ten tweede niet, omdat de complicering van de opgaven hier in feite maar uit twee grote categorieën bestaat, namelijk het al dan niet inwisselen en lenen – voor het overige zijn deze cijferbewerkingen louter iteratief van aard (dus een opeenvolging en herhaling van dezelfde handelingen). En daarmee wordt het onderscheid tussen voortgaande complicering en voortgaande schematisering minder markant. Dit wil echter niet zeggen dat de werkwijze van de progressieve schematisering voor deze operaties niet van belang zou zijn. Integendeel, vooral voor zwakke rekenaars blijkt deze aanpak effectief. Veldhuis (1981) komt in een onderzoek in het kader van remedial teaching van vier kinderen in het buitengewoon onderwijs tot onder meer de volgende conclusies: – *'dat de aanpak van de progressieve schematisering succesvol bleek te zijn voor remediërend werk ten behoeve van de bij het onderzoek betrokken kinderen, die in het op hun scholen vigerende cijferonderwijs (volgens het systeem van de progressieve complicering en remediërend werk, waarbij van dit systeem wordt gebruik gemaakt) waren vastgelopen; dat een zinvolle context, van waaruit de progressieve schematisering wordt gestart, een referentiekader, c.q. oriënteringsbasis bleek te zijn voor de in de algoritmisering toe te passen inwisselhandelingen.'* (Veldhuis 1981, p. 125)

Voor deze operaties geldt echter hetzelfde als voor vermenigvuldigen en delen: er is meer onderzoek nodig om de exacte effectiviteit ten opzichte van de traditionele aanpak af te meten.

Wel zijn de voorhanden onderzoeksgegevens en het ruwe empirische materiaal aan ervaringsgegevens dusdanig positief dat de navolging van deze Wiskobas-aanpak, welke thans op grote schaal in nieuwe Nederlandse reken-wiskundeprojecten en -methoden plaatsvindt, alleszins gerechtvaardigd lijkt. (Presentatie op internationaal niveau zal op korte termijn plaatsvinden.)

5 Samenvatting kenmerken, motiveringen en onderzoeksgegevens

In het voorgaande zijn de kenmerken van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering beschreven. We zullen hier de hoofdelementen ervan die zich laten groeperen rond de sleutelwoorden 'geïntegreerd' en 'progressief schematiseren' nog eens opsommen en tegelijk de doelstellingen, motiveringen en onderzoeksgegevens bondig in een serie onderwijs-leerstellingen samennemen.

Voor we daartoe overgaan eerst een voorbeeld van een toetsles aan het einde van de leergang delen. Tegen deze achtergrond krijgen de straks volgende kenmerken scherpe contouren.

We gebruiken het eerder gegeven voorbeeld '6394 : 12' als uitgangspunt en wel op de volgende wijze:

- Bereken 6394 : 12 zoals een leerling dat zou doen die nog maar een paar lessen in het staartdelen heeft gehad (en hem goed oplost).
- Hetzelfde nog een keer, maar nu voor een leerling die zo'n les of tien heeft gehad en het nog niet zo kort en snel kan als jij het kunt.
- Nog eens, maar nu voor een leerling die het minstens zo goed en vlug kan als jij het kunt.
- Laat zien hoe je via vermenigvuldigen de juistheid van de oplossing kunt controleren.
- Bedenk een verhaaltje bij de opgave '6394 : 12' zodat de uitkomst daarvan 532 is.
- Nog een verhaaltje, maar nu is de uitkomst 533.
- Nog één met als uitkomst 532 rest 10.
- De uitkomst is nu 532⁵/₆. Maak een verhaaltje.
- De uitkomst is 532,83 rest 4. Maak een verhaaltje.
- De uitkomst is 532,8333333. Maak een verhaaltje.

Merk hierin op: het terugblikken op de eigen leer-gang volgens progressieve schematisering (reflectie), het afschatten daarbij en de grote betekenis van contextproblemen.

1. Contextproblemen dienen als bron voor het algoritmiseren. De context verleent betekenis aan de verschillende cijferhandelingen, geeft houvast bij het uitvoeren van de procedures en verschaft de kinderen een betekenisvolle oriënteringsbasis voor het leren cijferen – aldus luidt de motivering.
2. Naast het voordeel voor het cijferen levert het uitgaan van contextproblemen ook op dat de toepassingsmogelijkheden van die algoritmen vergroot worden, zo wordt verondersteld, juist omdat cijferen en toepassen van meet af aan met elkaar verbonden zijn.
3. Er wordt aangesloten bij de informele methoden die de kinderen bij het oplossen van contextopgaven hanteren. De verschillende methoden worden in de groep besproken en de handigste werkwijzen gestimuleerd. Kortom, de weg naar de betreffende algoritmen wordt op een natuurlijke wijze ingeslagen. De algoritmen ontwikkelen zich stap-voor-stap.
4. Contextproblemen dienen zowel voor de ontwikkeling van de algoritmen als voor de inoefening van het geleerde. Voor dat laatste worden ook kale cijfersommen gebruikt.
5. In de loop van de leergang vindt een verdere schematisering en verkorting van berekeningen en notatiewijzen plaats.
6. Vanaf het begin worden problemen met relatief grote getallen aangeboden. De kinderen lossen ze op verschillende wijzen op: eenheid in aanbieding, differentiatie in oplossingsniveaus.
7. De eindniveaus kunnen al naar gelang de beoogde einddoelen variëren.
8. De verbinding tussen cijferen en flexibel rekenen komt tot uiting in het schatten en het handige niet-cijfermatige rekenen.
9. De onderzoeksresultaten van het geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering zijn nog schaars, maar samen met de talrijke ruwe empirische gegevens uit de proefscholen wijzen ze op een grote effectiviteit van deze geïntegreerde methode in vergelijking met het bestaande, geïsoleerde cijferen volgens progressieve schematisering.

Naar onze mening biedt deze aanpak van het cijferen een begaanbare weg tussen het gangbare cijferen en het klassieke hoofdrekenen, en daarmee een uitweg voor het dilemma rond cijferen en hoofdrekenen in relatie tot het gebruik van zakrekenmachine en computer.

Noten

1. Hoewel er bij redactie-opgaven wel degelijk sprake kan zijn van lees- en interpretatieproblemen (zie voor een overzicht: Shumway, 1980, p. 297 e.v.) is dit bij enkelvoudige tekstopgaven voor het derde en vierde leerjaar, waarover het hier voornamelijk gaat, in het algemeen niet het geval. Ten eerste blijkt dit uit het feit dat kinderen dit soort opgaven vaak beter maken dan de overeenkomstige 'kale' cijferopgaven (Brown, 1982), ten tweede komen ze vaak tot een goede oplossing via een omslachtige additieve methode (Hart, 1981), en ten derde blijkt dit als men dezelfde soort opgaven met kommagetallen aanbiedt waarbij primitieve rekenwijzen niet tot een oplossing voeren (Bell, Swan en Taylor, 1981). Voor het aanvangsonderwijs ligt deze problematiek overigens wat anders: daar spelen lees- en interpretatieproblemen een veel grotere rol (De Corte en Verschaffel, 1982a, 1982b, 1982c).
2. De vraag naar de onafhankelijkheid van de 'ontdekkingen' is niet zo ter zake als we bedenken dat reeds Kühnel een dergelijke aanpak globaal beschreven heeft (Treffers, 1982a). Overigens heeft de Wiskobas-groep in internationale contacten herhaaldelijk van haar werkwijze gewag gemaakt.
3. De kwestie van de verschillende algoritme-modellen hebben we hier buiten beschouwing gelaten, alsook de plaats van de talstelsels in deze nieuwe leergang cijferen. Zie daartoe De Jong (1977) en Dekker, Ter Heege en Treffers (1982). En ook konden we niet op de theoretische achtergronden van de hier gepresenteerde leergang ingaan. We hopen hier later op terug te komen. Daarbij zal ook het werk van Resnick, Gal'perin, Davydov en Freudenthal in de beschouwing betrokken worden.

Literatuur

Bell, A., M. Swan en G. Taylor, Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 1981 *12*, 399-421.

Bennedbek, B., Is self taught well taught? *Mathematics Teaching*, 1981, *95*, 11-14.

Bright, G.W., Assessing the development of computational skills. In: M. N. Suydam en R. E. Reys (Eds.), *Developing computational skills.* Reston: N.C.T.M., 1978, 148-163.

Brown, M., Rules without reasons? Some evidence relating to the teaching of routine skills to low attainers in mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1982, *13*, 449-461.

Buxton, L., *Do you panic about maths*? London: Heinemann, 1981.

Cockcroft, W. H., *Mathematics counts.* (Report). London: HMSO, 1982.

Corte, E. De, en L. Verschaffel, Eersteklassers en het spel der schoolvraagstukken. *Willem Bartjens*, 1982a, *1*, 112-118.

Corte, E. De, en L. Verschaffel, Eersteklassers en het spel der schoolvraagstukken (2), *Willem Bartjens*, 1982b, *1*, 167-172.

Corte, E. De, L. Verschaffel en J. Verschueren, First graders' solution process in elementary word problems. In: A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Antwerpen: PME, 1982c, 91-97.

Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers, *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas.* Utrecht: OW & OC, 1982.

Engen, H.van, en E.G. Gibb, *General mental functions associated with division*. Cedar Falls: Iowa State Teachers College, 1956.

Erlwanger, S. H., Benny's conception of rules and answers in IPI-mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1973, *vol 1 nr. 2*, 7-26.

Erlwanger, S. H., Case studies of children's conceptions of mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior,* 1975, *vol 1 nr 3*, 157-283.

Foxman, D. D. (Ed.), *Mathematical Development.* London: H. M. Stationary Office, 1980.

Hart, K. (Ed.), *Children's understanding of mathematics:* 11-16. London: Murray, 1981.

Heege, H. ter, Testing the maturity for learning the algorithm of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 1978, *9*, 75-83.

Hutton, J., Memoirs of a math teacher 5. Logical reasoning. *Mathematics Teaching*, 1977, *81*, 8-12.

Jong, R. de (Red.), *De abakus*. Utrecht: IOWO, 1977.

Kratzer, R. O. en S. S. Willoughby, A comparison of initially teaching division employing the distributive and Greenwood algorithms with the aid of a manipulative material. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1973, *4*, 197-205.

Laing, R.A. en R. A. Meyer, Transitional division algorithms. *Arithmetic Teacher*, 1982, *29*, 10-13.

Levin, J. A., Estimation techniques for arithmetic: every day math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 1981, *12*, 421-435.

N.C.T.M., *An agenda for action. Recommendations for school mathematics of the 1980's.* Reston: N.C.T.M., 1980.

Papert, S., *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas.* Brighton: The Harvester Press, 1980.

Plunkett, S., Decomposition and all that rot. *Mathematics in School*, 1979, *8*, 2-5.

Resnick, L. B., Syntax and semantics in learning to subtract. In: T. P. Carpenter, J. M. Moser en T. A.

Romberg (Eds.), *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1982, 136-156.
Shumway, R. J. (Ed), *Research in mathematics education.* Reston: N.C.T.M., 1980.
Sixma, J., Didactische analyse als planninghulp. In: B. P. M. Creemers (Red.), *Onderwijskunde als opdracht.* Groningen: Wolters Noordhoff, 1981, 209-232.
Suydam, M. N. en D. J. Dessart, Skill learning. In: R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education.* Reston: N.C.T.M., 1980.
Teule-Sensacq, P. en G. Vinrich, Résolution de problèmes de division au cycle élémentaire dans deux types de situations didactiques. *Educational Studies in Mathematics*, 1982, *13*, 177-205.
Treffers, A. (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden.* Utrecht: IOWO, 1979.
Treffers, A., Het stomste vak van de wereld (1). *Willem Bartjens*, 1981, *1*, 27-34.
Treffers, A. Cijferen in het rekenonderwijs van toen en nu, *Pedagogische Studiën*, 1982a, *59*, 97-116.
Treffers, A., Basisalgoritmen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 1982,*59*, 471-484.
Veldhuis, E. C., *Deelleergang cijferend optellen en aftrekken, volgens het principe van progressieve schematisering, gegeven in het kader van remedial teaching van vier kinderen in het buitengewoon onderwijs*. Utrecht: IPAW, 1981 (doct. scriptie).
Vink, H., *Algoritmen met kruispunten en eieren. Leerpsychologische verkenningen en een onderzoek naar het leerresultaat en het hanteren van een algoritmeleergang vermenigvuldigen in het derde leerjaar van de basisschool*, 1978 (scriptie mo-b).
Vrolijk, A., *Algoritmen in het onderwijs.* Utrecht: IPAW, 1981 (doct. scriptie).

Curriculum vitae

A. Treffers studeerde wiskunde en onderwijskunde, was eerst werkzaam in het voortgezette onderwijs, vervolgens in de periode 1971-1981 medewerker van het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO), en is vanaf 1 januari 1981 verbonden aan de vakgroep Onderzoek Wiskunde Onderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW & OC, subfaculteit wiskunde, Rijksuniversiteit Utrecht).
Hij promoveerde in 1978 op het proefschrift 'Wiskobas doelgericht', over de inhoud en beschrijvingswijze van de doelstellingen van het wiskundeonderwijs op de basisschool volgens Wiskobas.

Adres: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs & Computercentrum Rijksuniversiteit Utrecht, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Manuscript aanvaard 26-4-'83