Een bijdrage tot mathematisering van het rekenonderwijs

Onderzoek naar het oplossen van mathematische problemen in de hoogste klassen van de basisschool

Miriam A. D. Wolters en Jan N. Streumer
Afdeling Ontwikkelingspsychologie, I.P.A.W., R.U. te Utrecht

Samenvatting

Het artikel is opgebouwd uit twee delen. In het eerste deel worden een aantal ontwikkelingspsychologische grondslagen besproken aangaande het ontstaan van algemeen toepasbare oplossingsmethoden voor mathematische problemen. Deze denkwijzen blijken expliciet onderwezen te moeten worden.

Nikola en Talyzina (1972) en Fridman (1967) onderstrepen het belang van 'schema's' bij het onderwijzen van algemene oplossingsmethoden voor mathematische problemen. Fridman stelt expliciet dat het schema naast een logische en onderwijskundige funktie, vooral een psychologische funktie heeft. Hoewel Nikola en Fridman theoretisch dezelfde opvatting hebben over de funktie van schema's komen ze toch tot een andere opbouw bij het daadwerkelijk konstrueren van schema's.

In het tweede deel wordt het onderwijsexperiment van Nikola en Talyzina besproken. Eenzelfde onderwijsexperiment is ook, hoewel aangepast aan de Nederlandse situatie, uitgevoerd in het Nederlandse basisonderwijs. Het experimentele programma omvat het onderwijs in de zgn. procesopgaven, opgaven over processen als het uitvoeren van werk, beweging, verbruik van energie etc. Drie soorten procesopgaven, opklimmend in moeilijkheidsgraad worden aan de experimentele groep basisschoolleerlingen (klas 4) onderwezen. Een tweede, aan de experimentele groep gelijkwaardige groep leerlingen krijgt op traditionele wijze onderwijs in procesopgaven.

Een natoets bestaande uit representatieve items maakt het mogelijk de resultaten van de leerlingen uit de experimentele groep te vergelijken met de resultaten uit de kontrolegroep.

De experimentele groep blijkt signifikant beter te presenteren met name op die groep opgaven die in de moeilijkste kategorie vallen. De in het experimentele programma gevolgde benadering met de door Nikola en Talyzina gekonstrueerde schema's als denkmiddel lijkt een juiste te zijn.

1. *De ontwikkeling van denkwijzen*

Wiskundigen, onderwijskundigen en psychologen die zich bezighouden met mathematisering van het rekenonderwijs, moeten op de hoogte zijn van de resultaten van onderzoek naar de denkaktiviteiten van leerlingen. In dit artikel willen we enige ontwikkelingspsychologische grondslagen geven om met meer succes te kunnen werken aan de mathematisering van het rekenonderwijs.

1.1. *Nikola en Talyzina*

Nikola en Talyzina (1972) stellen, in hun onderzoek naar de ontwikkeling van een algemene oplossingsmethode voor mathematische problemen, dat in het huidige rekenonderwijs de manier van denken bij het oplossen van problemen als hulpmiddel wordt beschouwd. De denkwijzen worden niet expliciet onderwezen, waardoor de leerlingen ze meestal als zodanig ook niet zullen herkennen.

Zelfs als er wel denkwijzen gevormd worden bij het oplossen van problemen, zijn de leerlingen zich hiervan onvoldoende bewust. Het gevolg is dat er geen generalisatie optreedt: de onderwezen oplossingsmethoden kunnen alleen maar worden toegepast op die opgaven waarvoor ze werden ontwikkeld. Ook andere auteurs zijn deze mening toegedaan (Kohnstamm Ph. 1932, Fridman 1967, Bodanskij 1969).

Zo toont Menčinskaja aan, als ze de balans opmaakt van haar eigen onderzoek en dat van enige kollega-onderzoekers, dat de 'traditionele didaktiek' niet garandeert dat leerlingen *algemene* oplossingsmethoden leren.

'Bij het onderwijs in het oplossen van redaktieopgaven (....) heerst tot nu toe ten onrechte de mening, dat konkrete oplossingsmethoden voor redaktieopgaven van een bepaald type onderwezen moeten worden, waardoor men de leerlingen maar zwak bewapent met algemene werkwijzen of methoden, die voor een brede range van vraagstukken geschikt zouden zijn' (Menčinskaja in Bodanskij, p. 4).

Het gekonstateerde tekort kan volgens Nikola en Talyzina het beste ondervangen worden door de denkwijzen apart en expliciet te onderwijzen, hetgeen tevens zou kunnen leiden tot een aanzienlijke winst in onderwijstijd in het oplossen van problemen. Daarvoor moet niet alleen worden nagegaan welke denkwijzen onderwezen moeten worden, maar ook hoe!

Op basis van een analyse van de 'traditionele didaktiek' m.b.t. het leren oplossen van redaktieopgaven* kwamen ze niet alleen tot de konklusie dat de leerlingen erg veel hadden geleerd met het oplossen van deze problemen, maar tevens dat eigenlijk alles draaide om het kunnen omzetten van de gepresteerde problemen in mathematische taal. Dit nu klinkt eenvoudig, maar is, zoals al jarenlang blijkt, voor de leerlingen geen eenvoudige zaak. Om de omzetting op een efficiënte manier te kunnen verrichten, moeten de leerlingen het probleem analyseren, om de grootheden van het probleem in hun onderlinge relatie te kunnen bepalen. Nikola en Talyzina kwamen tot de ontdekking dat er een groot aantal (zij noemen een aantal van 30) type problemen zijn die allen terug te voeren zijn tot één type probleem: de zgn. procesopgaven (opgaven over processen, zoals werk, beweging, energieverbruik, vullen van bassins etc.). In deze opgaven gaat het altijd om drie grootheden: de snelheid (V), het tijdsverloop (T) en het resultaat (S) in hun onderlinge relaties.

Het onderzoek van Nikola en Talyzina was erop gericht na te gaan *hoe* ze het oplossen van procesopgaven (analyseren en het omzetten in mathematische taal) het beste konden onderwijzen.

1.2. *Fridman*

Fridman (1967) komt, in een poging een theorie over het oplossingsproces voor problemen te ontwikkelen, in eerste instantie tot de konklusie dat dit een onmogelijke opgave is. Er is alle reden om aan te nemen dat een van de belangrijkste hindernissen daarbij de onderzoeksmethoden zelf zijn. Zo wordt het oplossingsproces meestal onderzocht bij proefpersonen, die geleerd hebben problemen op te lossen hetgeen betekent dat er een oplossingsmechanisme onderzocht wordt, dat het resultaat is van bepaalde onderwijsmethoden. Bovendien betreft het meestal oplossingsmethoden die zich een vaste plaats in de rekendidaktiek hebben verworven. De vraag is gewettigd of het optimale oplossingsmethoden zijn. Als we andere onderwijsmethoden hanteren, krijgen we waarschijnlijk andere oplossingsprocessen en dus ook andere resultaten!

Bovendien kunnen we ook het oplossingsproces vanuit verschillende gezichtspunten bekijken:
wiskundig – welke wiskundige operaties moet men uitvoeren om de vraag van de opgave te beantwoorden;
logisch – uit welke logische operaties bestaat het oplossingsproces;
psychologisch – welke denkstappen worden gezet tijdens het oplossingsproces;
onderwijskundig – met welke onderwijsmethoden leren we ze problemen op te lossen.

Een belangrijke voorwaarde om goed psychologisch-onderwijskundig onderzoek te doen naar het oplossen van problemen is ook het oplossingsproces vanuit logisch-wiskundig oogpunt uitputtend te bezien. Zo komt Fridman tot de konklusie dat van elk reëel verschijnsel (mathematisch probleem, opgave) het kwantitatieve aspekt gekenmerkt is door vele grootheden, die op elk willekeurig moment een bepaalde waarde aannemen. Om het kwantitatieve aspekt van het verschijnsel te kennen, hoeft men niet altijd de waarde van alle grootheden te kennen, omdat ook enkele onderling afhankelijk zijn. Om de ombekende waarden van enkele grootheden, die een dergelijk verschijnsel kenmerken, te kunnen berekenen moet men die eerst omzetten in mathematische taal ofwel weergeven door een wiskundig model. Het opstellen van zo'n model is psychologisch gezien geen momenthandeling, maar een ingewikkeld proces in vele etappes, dat bestaat uit het opstellen van een hele serie modellen, van het meest konkrete tot het meest abstrakte, wiskundige (getallenmodel).

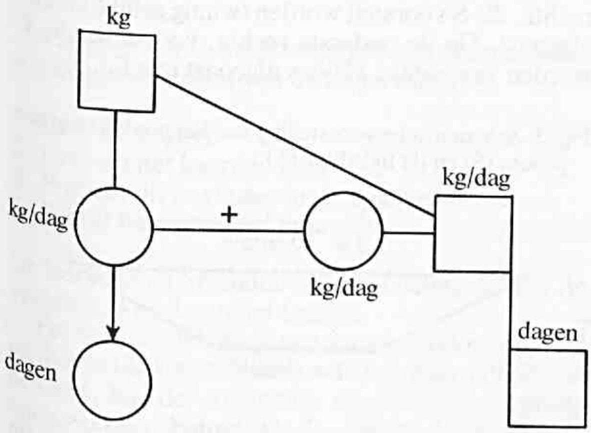
1.3. *De funktie van schema's*

En hiermee komen we weer bij Nikola en Talyzina die in hun onderwijsexperiment (zie par. 4) gebruik maken van modellen of schema's als hulpmiddel om te komen tot een algebraïsche vergelijking. In Fridman's terminologie zou een algebraïsche vergelijking het meest abstrakte model zijn. En nu gebeurt er iets merkwaardigs. Fridman stelt dat het schema als model een duidelijk psychologische funktie heeft (zie 1.2.). Nikola en Talyzina gebruiken het schema in hun onderwijsexperiment omdat naar hun idee het schema de grootheden en hun onderlinge relaties

* Tegenwoordig spreekt men liever van tekstproblemen om de associatie met de van iedere werkelijkheidszin gespeende opgaven uit het 'koopmansrekenen' tegen te gaan.

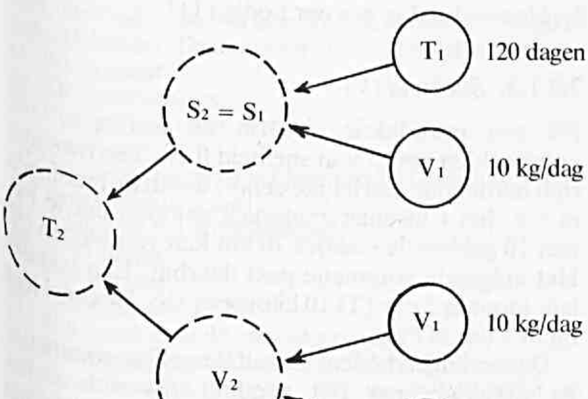
weergeeft, waardoor het de keuze voor de oplossingsmethode vergemakkelijkt. Beiden hechten dus enorm veel belang aan het schema en erkennen het als denkmiddel. Toch zien we bij het operationaliseren hiervan geheel verschillende schema's ontstaan. Als voorbeeld nemen we het probleem: 'Als je een koe elke dag 10 kg hooi geeft, is er genoeg voor 120 dagen. Voor hoeveel dagen is er genoeg hooi, als je per dag 2 kg meer geeft? (uit een Russisch rekenboek van 1963).

Fig. 1 Schema bij het oplossen van procesopgaven volgens Fridman



In het schema van Fridman *(zie Figuur 1)* zijn de cirkels de bekende grootheden, de vierkanten de onbekende grootheden.

Fig. 2 Schema bij het oplossen van procesopgaven volgens Nikola en Talyzina.



Een voorbeeld van een schema van Nikola en Talyzina voor dezelfde opgaven is gegeven in *Figuur 2*.

In dit schema zijn de gestippelde cirkels de gevraagde grootheden, de gesloten cirkels de bekende grootheden. In het schema van Nikola en Talyzina wordt de te vinden grootheid (T_2) voorgesteld als een funktie van meerdere grootheden (in het onderwijsexperiment leren de leerlingen dergelijke schema's opstellen; zie par. 4).

Het schema van Fridman is psychologisch niet juist, omdat de relaties tussen de grootheden niet uitgebeeld worden. De leerlingen zullen de relaties waarschijnlijk niet leren ontdekken en gebruiken bij het oplossen van de voorbeeldopgave. Bovendien wordt in het schema van Fridman verwezen naar konkrete gegevens die in de opgave voorkomen. Het schema kan daardoor niet model staan voor andere opgaven, die de analyse van andere konkrete processen tot onderwerp hebben.

2. *Het onderwijsexperiment*

2.1. *De onderzoeksopzet*

Nikola en Talyzina hebben uitgaande van de voornoemde ideeën een onderwijsexperiment uitgevoerd met 20 leerlingen uit het 3e en 4e leerjaar van het Russische basisonderwijs die achter waren met rekenen.

Binnen het 'Projekt Redaktiesommen' is analoog aan de gang van zaken in het experiment van Nikola en Talyzina het vertaalde en aan de Nederlandse onderwijssituatie aangepaste experimentele programma gegeven aan leerlingen van het 4e leerjaar*. Verreweg de meeste leerlingen waren afkomstig uit wat wel beroepsniveau 4 (kleine zelfstandigen) en beroepsniveau 5/6 (middelbare en hogere beroepen) (I.T.S.-systeem, Nijmegen) wordt genoemd. De uitvoering van het experimentele programma vond plaats tijdens de maanden mei en juni van het schooljaar 1974-1975.

Op basis van voortoets-resultaten** werden de vierde klassers ingedeeld in een experimentele groep ($n = 28$) en een kontrolegroep ($n = 28$). Leerlingen met eenzelfde resultaat op de voortoets werden paargewijs over beide groepen verdeeld, waardoor twee gelijkwaardige groepen ontstonden. De experimentele groep kreeg het experimentele program-

* Dit experiment werd uitgevoerd door de onderwijskundestudenten R. Massar en B. Nous in het kader van het bijvak ontwikkelingspsychologie.

** Zie voor een beschrijving van de voor- en natoets paragraaf 3.

ma; de kontrolegroep kreeg 'traditioneel' rekenonderwijs*** zonder dat speciaal aandacht aan een bepaald type redaktieopgaven werd besteed.

2.2. *Experimenteel programma*

De onderwijssequentie van het experimentele programma bestaat uit de volgende onderdelen in hiërarchische relatie:

a. onderwijs in een gegeneraliseerd begrip van de drie basisgrootheden: T, S en V (5 lessen van 45 min.);
b. onderwijs in de relaties tussen de drie basisgrootheden: S = V x T, T = S : V en V = S : T (5lessen van 45 min.);
c. onderwijs in de samengestelde procesopgaven (6 lessen van 45 min.).

De nu volgende beschrijving geeft een niet geheel volledig beeld van het experimentele programma, maar bevat wel de meest opmerkelijke aspekten.

2.2.1. *Basisgrootheden*

2.2.1.1. *Tijd (T)*

Het leren van dit begrip omvat de volgende aspekten:

- uitsplitsen van de begin- en eindtijd;
- differentiëren tussen tijdsmoment en tijdsinterval;
- de tijdseenheid wordt beschouwd als een bepaald tijdsinterval;
- het meten van tijd.

Tijdens de gematerialiseerde fase maken de leerlingen gebruik van modellen, waarin de tijd wordt voorgesteld m.b.v. het Cuisenairemateriaal en een lijnstuk bestaande uit 24 delen (voorstellende de uren van de dag). Dit geeft de leerlingen de gelegenheid te manipuleren met tijdsintervallen; een getal toe te kennen aan een tijdseenheid; het aantal tijdseenheden te berekenen, etc. Speciale aandacht wordt besteed aan de tijdsintervallen die lopen van vóór 12 uur 's nachts of 's middags tot na dit punt. De leerlingen maken opgaven als: 'Geef eens op een lijn aan, van wanneer tot wanneer jij slaapt'. Nadat de leerlingen de lengte van een uur op de lijn hebben vastgesteld, bepalen zij welke uren bij het interval horen, stellen het begin- en eindpunt vast en de grenzen tussen de uren. Daarna tellen ze het aantal gebruikte tijdseenheden op.

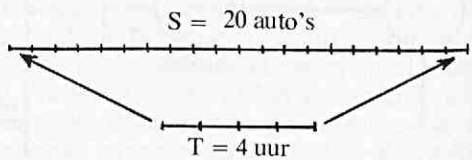
*** Onderwijs met een bestaande, tamelijk modern geachte Nederlandse rekenmethode.

2.2.1.2. *Produkt /resultaat (S)*

Voor het materialiseren van het produkt van het proces worden konkrete objekten in het klaslokaal en stroken papier gebruikt. Om de samenhang tussen T en S te schematiseren wordt deze gematerialiseerd. De leerlingen tekenen daartoe het produkt van het proces (S) en de tijdsduur (T) ervan op twee horizontale rechten.

Voorbeeld: Een autowasser wast in 4 uur 20 auto's wordt als volgt getekend. Op de bovenste rechte, die S voorstelt worden twintig gelijke stukjes afgepast. Op de onderste rechte, voorstellende T, worden vier gelijke stukjes afgepast (zie fig. 3).

Fig. 3 Schematische voorstelling van het produkt van een proces (S) en de tijdsduur (T).



Dit type tekeningen komt tot stand m.b.v. de antwoorden van de leerlingen op de volgende vragen, die waren vermeld op kaartje I (hulpmiddel):

1. Wie handelt?
2. Hoeveel wordt er gemaakt (S)?
3. Hoeveel tijd is er voor nodig (T)?

2.2.1.3. *Snelheid (V)*

Na een introduktie, waarin de leerlingen zelf voorbeelden geven van snelheid (b.v. 'een raceauto rijdt harder dan een lelijke eend') wordt de leerlingen m.b.v. het Cuisenairemateriaal getoond dat je b.v. met 10 gekleurde staafjes 10 km kan voorstellen (S). Het volgende sommetje past daarbij: 'Een wandelaar loopt in 2 uur (T) 10 kilometer (S). Hoeveel legt hij in 1 uur af?'

De leerlingen bedenken zelf dergelijke sommetjes en materialiseren het produkt (S) m.b.v. het Cuisenairemateriaal. In ons voorbeeld is S het resultaat van 2 uur. In 1 uur legt de wandelaar dus maar de helft van S af (de leerlingen nemen 5 van de 10 gekleurde staafjes wég). De leerlingen 'ontdek-

ken' zo zelf dat snelheid datgene is wat je in één tijdseenheid kunt doen/hebt gedaan. In een latere fase worden het produkt van het proces én de tijd weergegeven m.b.v. lijnstukken. Voor de analyse van de opgavesituaties, die m.b.v. lijnstukken worden opgelost, wordt kaartje 2 geintroduceerd. De tekst van kaartje 2 luidt:
Bepaal van de opgave:

1. Wie handelt?
2. Hoeveel wordt er gemaakt/gedaan (S)?
3. Hoeveel tijd kost dat (T)?
4. Hoeveel wordt er per tijdseenheid gemaakt/gedaan (V)?

Het zoeken n.a.v. het kaartje gebeurt overeenkomstig de aanwijzingen van de onderwijzer:

1. Lees de opgave.
2. Lees op het kaartje vraag 1.
3. Probeer dit te vinden in de opgave.
4. Schrijf het antwoord in je schrift.

De leerlingen herhaalden deze handelingen voor de vragen 2, 3 en 4 van het kaartje.

Ter verduidelijking geven we een stukje protocol uit het artikel van Nikola en Talyzina (1972) dat behoort bij de volgende opgave: 'Een groep bouwvakkers bouwt in 21 dagen 3 gebouwen. Hoelang doen ze over één gebouw?'

'Het "produkt" van het proces (3 gebouwen) en de tijd (21 dagen) werd weergegeven door lijnstukken. De moeilijkheid van deze opgave is, dat als we het "produkt" door de tijd delen, we niet een geheel getal krijgen maar een breuk en het werken met breuken hadden deze leerlingen nog niet gehad.
N.B. De "tijd" kan wel gemakkelijk door het "produkt" gedeeld worden. Daarom gingen we als volgt te werk:
pl. Wie handelt?
pp. De bouwvakkers.
pl. Hoeveel heeft men gemaakt?
pp. 3 gebouwen.
pl. Wijs op de tekening het hele produkt eens aan.
pp. (wijst lijnstuk S aan)
pl. In hoeveel tijd is dat gemaakt?
pp. In 21 dagen.
pl. Wijs dat aan.
pp. (wijst lijnstuk T aan).
pl. Wat wordt er in de opgave gevraagd?
pp. Hoeveel er gemaakt wordt in iedere tijdseenheid.
Direkt antwoorden 12 ppn.: "We moeten dit (wijst op lijnstuk S) delen door 21".
pl. Verdeel de S lijn eens in 21 delen.
pp. (langzaam verdeelt hij lijnstuk S in 21 delen).
pl. Geef eens aan hoeveel er in een dag gemaakt wordt?
pp. Wijst naar het eerste deelstukje van de lijn.
pl. Hoe moet je dat noemen? Schrijf dat op de plaats die je aanwees.
pp. (schrijft op "V").
pl. En kan er op andere plaatsen van deze lijn ook "V" staan?
pp. (wijst naar alle andere delen).
Alle ppn. stelden zonder ooit breuken te hebben gehad, de juiste formule samen'.

2.2.2. *Relaties tussen basisgrootheden*

Om de leerlingen de afhankelijke relaties tussen de grootheden T, Sen V te onderwijzen wordt *niet* begonnen met de introduktie van de formules. (S = V x T, T = S : V en V = S : T), daar de leerlingen dan niet in staat worden gesteld de relatie tussen de verschillende grootheden ook echt te begrijpen. Jansen en Terlingen (1976) wezen erop dat het in ons huidige basisonderwijs nog veelvuldig voorkomt dat uitsluitend formules ter oplossing van opgaven worden aangeleerd, waardoor het de leerlingen wordt verhinderd tot werkelijk begrip te komen (hun onderzoek betrof het oplossen van 'oppervlaktesommen').

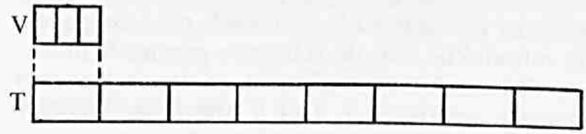
Door een paar opgaven met onjuiste of ontbrekende gegevens te laten maken komen de leerlingen niet alleen tot de ontdekking dat je twee grootheden nodig hebt om de derde te kunnen vinden, maar ook dat ze onderling afhankelijk zijn.

Het onderwijsleerproces wordt zo ingericht dat de leerlingen tijdens de gematerialiseerde fase, waarin ze 15 opgaven krijgen, waarvan ze respektievelijk de T, S en V moeten uitrekenen, zelf tot het ontdekken van de formules kunnen komen.

De leerlingen moeten de opgaven lezen en de gegevens, zowel V als T, m.b.v. het Cuisenairemateriaal of met lijnstukken in een 'model' leggen.

B.v. 'Hoeveel loten verkoopt Henk in 8 uur als hij 3 loten per uur verkoopt? Bij deze opgave past het model dat weerggegeven is in *Figuur* 4.

Fig. 4 Model van de grootheden V en T.



De resultaten van de 15 opgaven moeten door de leerlingen worden ingevuld in een blokschema zoals weergegeven in *Figuur* 5.

Fig. 5 Blokschema

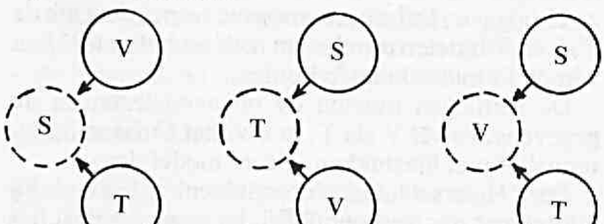
	S	T	V	
Opgave 1	?	X	X	
.............*	.	.	.	S = V x T
Opgave 5	?	X	X	
Opgave 1	X	X	?	
.............*	.	.	.	V = S : T
Opgave 5	X	X	?	
Opgave 1	X	?	X	
...........*	.	.	.	T = S : V
Opgave 5	X	?	X	

*Opgaven 2 t/m 4 zijn i.v.m. beperking van de omvang van fig. 3 niet ingetekend.

Tijdens de verbale fase worden de drie typen procesopgaven gemaakt zonder gebruikmaking van het 'model' en het blokschema. Om de overgang naar de mentale fase soepeler te doen verlopen worden zg. 'redeneersommen' (Fig. 6) ingevoerd. We onderscheiden drie typen:

- redeneerboom voor 'S-opgave'
- redeneerboom voor 'T-opgave'
- redeneerboom voor 'V-opgave'

Fig. 6 Redeneerboom



Deze redeneerbomen vormen de basis voor het oplossen van de meer ingewikkelde procesopgaven. De introduktie van de schema's geschiedt m.b.v. een dialoog tussen leerkracht en leerlingen over opgaven, waarin de S, T of V uitgerekend moeten worden.

2.2.3. *Samengestelde procesopgaven*

Bij samengestelde procesopgaven hebben we te maken met een samengestelde handeling. Het oplossingsproces kan door de volgende faktoren bemoeilijkt worden:

a. We hebben te doen met twee of meer krachten.
b. De krachten werken elkaar tegen of werken samen.
c. De begintijd van de verschillende krachten varieert.
d. (Een) groothe(i)d(en) is/zijn opgebouwd uit deelwaarden.

Het onderwijs in deze opgaven wordt evenals het onderwijs in de basisgrootheden en hun relaties, begonnen met gematerialiseerde handelingen. Daarna wordt om de overgang naar de verbale fase te vergemakkelijken, kaartje 3 geintroduceerd. Kaartje 3 bevat de volgende tekst:

1. Hoeveel 'elementen' (b.v. deelnemers) handelen?
2. Begint en eindigt men tegelijkertijd?
3. Hoe handelt men?
   a. Werkt men de tegenstelde kant op?
   b. Werkt men dezelfde kant op?
4. Welke totale grootheden zijn bekend (S_o, T_o, V_o)?
5. Welke van de grootheden zijn bekend (S_i, T_i, V_i)?
6. Wat wordt er gevraagd?

De leerlingen lossen m.b.v. hulpkaartje 3 een groot aantal procesopgaven gematerialiseerd (m.b.v. tekeningen) op.
De bovengenoemde moeilijkheidsfaktoren worden geisoleerd ingevoerd en pas daarna gekombineerd.
In de laatste fase van het onderwijsproces worden dezelfde type redeneerbomen gebruikt als bij de relaties tussen de basisgrootheden (fig. 6). In fig. 7 geven we een voorbeeld van een (ingewikkelde) redeneerboom, waarbij de volgende opgave* past: 'Drie auto's verbruikten samen in 10 uur 250 liter benzine. De eerste auto gebruikte 60 liter, de tweede auto 110 liter. Hoeveel gebruikte de derde auto per uur?

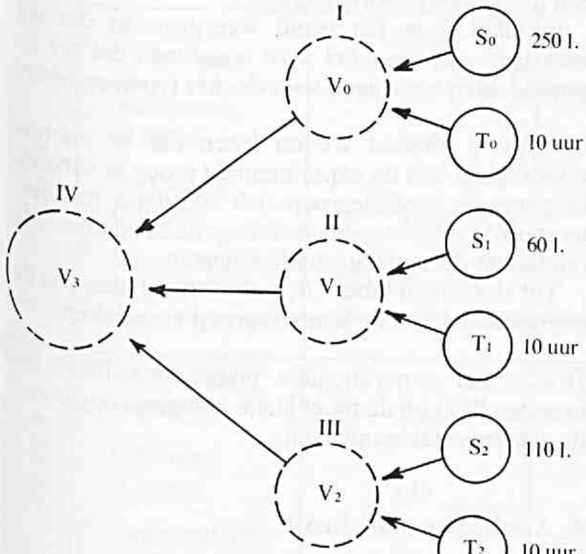
3. *Toetsen en Resultaten*

3.1. *Nikola en Talyzina*

Nikola en Talyzina hebben, zoals ze dat zelf noemen, aan het eind van het onderwijsexperiment een 'vergelijkend' experiment uitgevoerd, d.w.z.: de experimentele groep (20 ppn.) kreeg de volgende twee samengestelde opgaven te maken:

* Ook andere redeneerbomen zijn mogelijk bij deze opgave.

Fig. 7 Redeneerboom voor opgaven met samengestelde basisgegevens



a. Vanuit twee steden, die op een afstand van 540 km van elkaar liggen, vertrekken tegelijkertijd elkaar tegemoetrijdend, twee treinen. De ene trein rijdt met een snelheid van 40 km/uur. Na zes uur ontmoeten de treinen elkaar. Bepaal de snelheid van de tweede trein.

b. Er moeten 60 bomen geplant worden. Als de derde klas dat alleen doet, doen ze er 3 uur over; als de vierde klas dat alleen doet, doen ze er 6 uur over. Hoelang duurt het als de twee klassen samenwerken?

18 leerlingen uit resp. een normale 4e, 5e, 6e en 8e klas kregen ook deze twee samengestelde opgaven te maken ('kontrolegroep'). Van de experimentele groep loste iedereen opgave a op. Opgave b werd door 13 van de 20 ppn. goed gemaakt (65%). De resultaten van de kontrolegroep zijn weergegeven in tabel 1.

3.2. *Projekt redaktiesommen*

3.2.1. *De toetsen*

Zoals vermeld kregen de ppn. uit het onderzoek binnen het 'projekt redaktiesommen' een voortoets en een natoets (zowel de experimentele als de kontrolegroep). De voortoets en natoets waren z.g. parallel-toetsen: aantal, soort en moeilijkheidsgraad van de items van beide toetsen kwamen overeen. De gekonstrueerde toetsen bestonden uit 14 items, die als volgt verdeeld waren:

- Basisgroothedenopgaven: items 2 en 4
- Relatie-opgaven: items 1, 3, 5, 7, 9, 12 en 14
- Samengestelde opgaven, onderverdeeld in:
- Opgaven die gekarakteriseerd worden door de onder d. genoemde faktor m.b.t. samengestelde opgaven (par. 2.2.3.); item 6 en 11
- Opgaven die gekarakteriseerd worden door de onder a., b. of c. genoemde faktoren; item 8, 10 en 13.

Ter illustratie geven we de voortoets

1. Bij Jamin worden per week 20.000 repen chocolade gemaakt. Een week bestaat uit 5 werkdagen. Hoeveel repen worden er per dag gemaakt?
2. Hoeveel uren liggen er tussen 9 uur 's morgens en 5 uur 's middags?
3. Een fiets kost *f* 188,–. Jan spaart per week *f* 4,–. Hoeveel weken moet hij sparen om die fiets te kunnen kopen?
4. Je gaat 's avonds om 8 uur naar bed. Je staat de volgende morgen om 7 uur op. Hoe lang heb je geslapen?
5. De pompbediende laat de benzinetank van de auto vollopen in 20 sekonden. Er zit dan volgens de pomp 40 liter in. Hoeveel benzine stroomt er per seconde in de tank?
6. 3 ploegen werken 15 dagen aan de aanleg van een weg. De eerste ploeg werkt alleen maar de eerste 6 dagen met een snelheid van 200 meter per dag. Daarna beginnen de tweede en derde ploeg aan het werk. De tweede groep werkt met een snelheid van 300 meter

Tab. 1 De resultaten van de kontrolegroep m.b.t. twee samengestelde opgaven

Opgaven	Aantal leerlingen	Juist opgelost								totaal	
		4e klas		5e klas		6e klas		8e klas			
Opgave a	18	4	22%	7	39%	8	44%	4	22%	23	16[illegible]
Opgave b	18	4	22%	6	33%	10	50%	3	17%	23	16%

per dag. De derde groep werkt met een snelheid van 350 meter per dag. Met welke snelheid wordt er na de zesde dag gewerkt?

7. Een trein rijdt 210 km in 3 uur. Hoeveel km rijdt die trein per uur?
8. De afstand van A naar B is 20 km Jan vertrekt uit A om 2 uur 's middags. Piet vertrekt ook om 2 uur, maar vanuit B. Beide lopen 5 km per uur. Hoe laat ontmoeten ze elkaar?
9. Een vlot drijft met een snelheid van 41/2 meter per sekonde met de stroom mee. Hoe lang doet het vlot over een afstand van 221/2 km.?
10. Twee stratenmakers werken aan de aanleg van een trottoir. Ze werken elkaar tegemoet. Het trottoir wordt 360 m lang. De ene stratenmaker legt per dag 10 m; de andere 8 m. Op de hoeveelste dag ontmoeten ze elkaar?
11. Drie tuinlieden werken aan de aanleg van een park. Tuinman A begint om 7 uur en werkt tot de pauze van 8 uur. Hij plant dan 160 struiken. Na de pauze gaat hij met dezelfde snelheid verder. Tuinman B en tuinman C beginnen om 9 uur en planten samen 65 struiken per uur. Alle drie werken door tot 12 uur. Hoeveel bomen planten ze alle drie samen van 10 tot 11 uur?
12. In een kas moet een tuinier slaplantjes zetten. Hij plant in 4 uur 240 plantjes. Hoeveel plant hij er per uur?
13. Twee arbeiders in een fabriek werken tegelijkertijd aan 1 televisie, die opgebouwd moet worden uit 160 onderdelen. De ene arbeider monteert 12 onderdelen per uur en de andere 8. In hoeveel tijd is die televisie klaar?
14. Op een boerderij wordt voor het vee 2000 kilo voer ingekocht. Per dag wordt er 25 kilo voer verbruikt. Voor hoeveel dagen heeft men voldoende voer?

3.2.2. *Resultaten*

We berekenden de gemiddelde score op de voor- en natoets voor de twee afzonderlijke groepen: A (experimentele konditie) en B (traditionele konditie) en gingen met behulp van een t-toets na of deze verschillen signifikant waren. De resultaten zijn in tabel 2 weergegeven.

De resultaten spreken in feite voor zich. Het onderwijs met het experimentele programma levert een duidelijke vooruitgang op.

In tabel 3 is het beeld weergegeven dat we verkrijgen als we tabel 2 zo opsplitsen dat we de gemiddelden verkrijgen voor de drie typen opgaven

In tabel 3 kunnen we nu lezen dat de enorme vooruitgang van de experimentele groep in vergelijking met de kontrolegroep zich met name manifesteert op de twee moeilijkste kategorieën opgaven, de relatie- en de samengestelde opgaven.

Tot slot zijn in tabel 4 de natoetsresultaten van de experimentele en de kontrolegroep vergeleken.

D.w.z. het experimentele programma heeft het meeste effekt bij de moeilijkste kategorie opgaven – de samengestelde opgaven.

4. *Konklusies en diskussie*

Het 'vergelijkend' experiment van Nikola en Talyzina wijkt op een aantal punten van ons experiment af en is daarom niet geheel vergelijkbaar. Deze punten zijn:

- Als natoets worden twee samengestelde sommen gegeven. In ons experiment worden zowel in voor- als natoets vijf samengestelde opgaven gegeven met een aantal andere opgaven.
- De experimentele groep bij Nikola bestond uit 20 ppn. die een achterstand hadden in rekenen. Bij ons ging het om leerlingen uit een normale 4e klas van de basisschool.
- En tenslotte zijn bij Nikola de kontrolegroepen niet vergelijkbaar met de experimentele groep.

Daar staat tegenover dat de resultaten van de experimentele groep van Nikola een bijzondere

Tabel 2 Toetsing van de voor- en natoetsgemiddelden voor de experimentele en de kontrolekonditie.

	Voortoets gemiddelde	Natoets gemiddelde	t-waarde	p-waarde
Groep A (exp. kond.)	7,11	12,42	– 13,61	< <0,001
Groep B (trad. kond.)	7,04	8,57	– 2,85	0,01> p > 0,001

Tabel 3 Toetsing van de voor- en natoetsgemiddelden voor de experimentele en de kontrolegroep uitgesplitst naar de drie typen opgaven.

	Type items	Voortoets gemiddelde	Natoets gemiddelde	t-waarde	p-waarde
Groep A	Basisgrooth. (2 items)	1,86	1,93	– 1,96	0,1 > p > 0,05
	Relatieopg. (7 items)	3,96	6,68	– 8,39	< < 0,001
	Samengest. opg. (5 items)	0,93	4,25	– 15,53	< < 0,001
Groep B	Basisgrooth. (2 items)	1,86	1,86	0,00	1,00
	Relatieopg. (7 items)	4,14	5,04	– 2,47	0,02 > p > 0,01
	Samengest. opg. (5 items)	1,04	1,93	– 3,42	0,01 > p > 0,001

Tabel 4 Toetsing van de natoetsresultaten van de kontrolegroep en de experimentele groep uitgesplitst naar de drie typen opgaven.

Type item	Groep A natoets gem.	Groep B natoets gem.	t-waarde	p-waarde
Basisgrooth. (2 items)	1,93	1,86	0,92	> 0,2
Relatieopg. (7 items)	6,68	5,04	5,70	0,01 > p > 0,001
Samengest. opg. (5 items)	4,25	1,93	8,51	< 0,001

waarde krijgen. Het gaat om 20 leerlingen met een achterstand in rekenen en die nu met een 100% en 65% goed resultaat uit de bus komen. Daarbij moet vermeld worden dat deze 20 lln. met plezier redaktiesommen gingen oplossen, terwijl ze voordien daar een hekel aan hadden. Nadelig is dat de kwantitatieve gegevens slechts verkregen werden van twee opgaven.

Ondanks de betrekkelijk kleine groepen in de experimentele en de kontrolekonditie, menen we te mogen konkluderen dat de resultaten van ons onderwijsexperiment aantonen dat het experimentele programma zondermeer succes heeft (tabel 2) en dat het programma het meest opzienbare effekt sorteert bij de samengestelde opgaven (tabel 4). Dit alles betekent dat niet alleen een dergelijk opgezet onderwijsprogramma voor het oplossen van mathematische problemen succes heeft, maar ook dat het schematiseren een fundamentele rol speelt.

In het experimentele programma zien we dat met name voor het oplossen van de samengestelde opgaven veel tijd en aandacht besteed wordt aan het opzetten en uitwerken van 'redeneerbomen' in de vorm van schema's. Dat een dergelijk gebruik van schema's, in tegenstelling tot de schema's van Fridman, een psychologisch juist gebruik is doen de resultaten van de experimenten vermoeden. Het lijkt zinvol op de nu ingeslagen weg door te gaan willen we komen tot mathematisering van het rekenonderwijs.

Literatuur

Bodanskij, F. G., Het ontwikkelen van een algebraïsche oplossingsmethode voor redaktieopgaven in de onderbouw, in: De psychologische capaciteiten van leerlingen uit de onderbouw voor het wiskunde-onderwijs. (V. V. Davydov). Moskou 1969 (Vertaling vakgroep i.o. Ontwikkelingspsychologie).

Fridman, L. M., Oplossingsmechanismen voor redaktieopgaven. Voprosy Psichologii, nr. 2. 1967. (vertaling vakgroep i.o. Ontwikkelingspsychologie).

Jansen. F. en C. Terlingen, Een experimentele leergang 'oppervlakte' op grond van de theorie van Gal'perin, ontwikkeld en getoetst op een basisschool. (Interne publikatie I.P.A.W., vakgroep i.o. Ontwikkelingspsychologie).

Kohnstamm, Ph., Over 'denken' en 'leeren denken'. Mededelingen voor Paedagogiek, no. 22. Amsterdam, 1932.

Massar, R., en B. Nous, Een onderzoek naar S.T.V.-sommen in het kader van het blok kognitieve ontwikkelingspsychologie. Breda, december 1975.

Nikola, G., en N. F. Talyzina, Het leren van algemene oplossingsmethoden voor rekenkundige opgaven (redaktieopgaven), in: Aanleren van de bekwaamheid tot actief leren (P. J. Gal'perin en N. F. Talyzina). Moskou, 1972 (vertaling vakgroep Ontwikkelingspsychologie i.o.).